



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTA' DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI

METODI E MODELLI MATEMATICI PER LE SCIENZE APPLICATE

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**DISCRETIZZAZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI DI BIOT
CON UN APPROCCIO COMBINATO TRA METODO AGLI
ELEMENTI FINITI E VOLUMI FINITI**

Relatore: *Prof. Ing. Massimiliano Ferronato*

Laureando: *Giovanni Isotton*

A.A. 2013-2014

INDICE

SOMMARIO.....	5
INTRODUZIONE.....	7
CENNI SUL METODO DEI VOLUMI FINITI.....	11
1. DESCRIZIONE DEL MODELLO PORO-ELASTICO ACCOPPIATO	13
1.1. EQUAZIONI DELLA POROELASTICITÀ	13
1.2. DISCRETIZZAZIONE NUMERICA E IMPLEMENTAZIONE	18
1.2.1. FORMULAZIONE VARIAZIONALE DELL'EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO ELASTICO	18
1.2.2. FORMULAZIONE AI VOLUMI FINITI DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DI MASSA	21
1.2.2.1. FORMA INTEGRALE CLASSICA DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DI MASSA.....	21
1.2.2.2. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE E DEFINIZIONE DEI VOLUMI DI CONTROLLO	21
1.2.2.3. TRATTAMENTO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO.....	22
1.2.2.4. DEFINIZIONE DEI MODELLI PER LA STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE.....	22
1.2.2.5. STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE CON IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA DI GAUSS	23
1.2.2.6. MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE.....	27
1.2.2.7. STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE COME RAPPORTO INCREMENTALE	28
1.2.2.8. MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE.....	29
1.2.2.9. CREAZIONE DEI VETTORI DI CONNESSIONE.....	31
1.2.2.10. MATRICI DI CAPACITÀ LOCALI.....	31
1.2.3. INTEGRAZIONE NEL TEMPO.....	32
1.2.4. SOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO DI EQUAZIONI LINEARI.....	33
2. VERIFICA DI CONVERGENZA DEL PROBLEMA STAZIONARIO.....	35
INTRODUZIONE	35
2.1. MODELLI IMPLEMENTATI.....	36
2.2. DESCRIZIONE DELL'ESEMPIO TEST	36
2.3. DESCRIZIONE DELLE GRIGLIE DI CALCOLO.....	37
2.4. RISULTATI NUMERICI.....	40
2.4.1. TEST DI CONVERGENZA NEL 2-D.....	40
2.4.1.1. OSSERVAZIONI.....	44
2.4.2. TEST DI CONVERGENZA NEL 3-D.....	45
2.4.2.1. OSSERVAZIONI.....	48
2.4.3. SCELTA DEL MODELLO PER LA STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE	49
3. INFLUENZA DELLA GRIGLIA DI CALCOLO SUL TERMINE TRANSITORIO LEGATO ALLA COMPRESSIBILITÀ DEL FLUIDO.....	51
INTRODUZIONE.....	51
3.1. DESCRIZIONE DELL'ESEMPIO NUMERICO	51
3.2. RISULTATI NUMERICI IN 2-D E 3-D	53
3.2.1. OSSERVAZIONI	58
4. RISULTATI NUMERICI.....	59
INTRODUZIONE	59
4.1. CONSOLIDAZIONE DI TERZAGHI.....	60
4.1.1. DISCRETIZZAZIONE 2D	63
4.1.1.1. OSSERVAZIONI.....	74
4.1.2. DISCRETIZZAZIONE 3D	75
4.1.2.1. OSSERVAZIONI.....	79
4.2. PROBLEMA ETEROGENEO.....	80
4.2.1. DISCRETIZZAZIONE 2D CON GRIGLIA TIPO 4	82
4.2.1.1. OSSERVAZIONI.....	86
5. CONCLUSIONI.....	87
BIBLIOGRAFIA	89

SOMMARIO

Il problema della soluzione numerica delle equazioni di Biot che descrivono la consolidazione tridimensionale non è ancora stato risolto sotto tutti i suoi aspetti. Recentemente sono stati indagati diversi approcci per far fronte al mal condizionamento del sistema algebrico risultante e all'instabilità nella soluzione della pressione come la formulazione agli elementi finiti misti. Tuttavia quest'ultima formulazione porta ad un numero di incognite che può crescere facilmente a centinaia di migliaia nelle applicazioni reali. Buoni risultati si sono ottenuti anche discretizzando l'insieme di equazioni con il metodo dei volumi finiti. Questi modelli, però, necessitano di una discretizzazione spaziale complessa, infatti ogni incognita deve essere definita su una griglia indipendente dalle altre per evitare instabilità nella soluzione.

Nel presente studio è stato sviluppato un modello che discretizza l'equazione dell'equilibrio elastico con una formulazione variazionale classica agli elementi finiti e riserva all'equazione del bilancio di massa un approccio ai volumi finiti. In questo modo la discretizzazione rimane conservativa, con effetti benefici sul problema dell'oscillazione dei valori di pressione come con gli elementi finiti misti, ma riducendo in modo considerevole il numero di incognite legate al problema di flusso. Inoltre la discretizzazione spaziale rimane quella standard usata per gli elementi finiti. Per contro la nuova formulazione può risentire di alcuni aspetti negativi come la necessità di scegliere un modello per il gradiente di pressione, la dipendenza dalla griglia di calcolo e una minor accuratezza nella precisione nel calcolo della pressione.

INTRODUZIONE

Con il termine poro-elasticità si intende il processo accoppiato tra la deformazione dello scheletro solido e il flusso tra i pori di un mezzo poroso. Le basi teoriche di questo processo sono state introdotte da Terzaghi nel caso monodimensionale [10] ed estese poi da Biot nelle tre dimensioni [11]. Sebbene siano stati sviluppati approcci più sofisticati ed eleganti [17], le equazioni di Biot sono usate tutt'oggi per affrontare diversi tipi di problemi, dall'ingegneria alla biomedica. Per esempio sono la base per lo studio della subsidenza [13,23,25], degli effetti dell'estrazione di un fluido dal sottosuolo [20] o della disposizione di un carico in superficie per lungo tempo [9]. In biomedica è usata per prevedere le sollecitazioni indotte da tumori al cervello [24] oppure per prevedere le deformazioni delle ossa sottoposte ad un carico [3].

Nonostante la grande attività di ricerca in questo campo il problema della soluzione numerica delle equazioni di Biot non è stato risolto sotto tutti i suoi aspetti. Le principali difficoltà numeriche risiedono nella soluzione di un problema che è fortemente mal condizionato e nell'oscillazione numerica dei valori di pressione all'interfaccia tra due materiali eterogenei. Un recente approccio prevede la discretizzazione delle equazioni di Biot con una formulazione agli elementi finiti misti [14]. Con questo modello le incognite di spostamento sono localizzate ai nodi del reticolo di calcolo, quelle di pressione nei baricentri degli elementi e quelle di flusso sulla facce degli elementi, come illustrato in Fig. A nel caso bidimensionale.

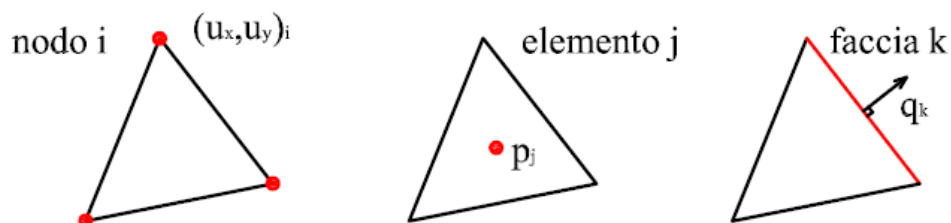


Fig. A: Locazione delle incognite nel modello ad elementi finiti misti.

Tale studio mostra che per una corretta modellizzazione del fenomeno, in modo tale da evitare oscillazioni nei valori di pressione, è necessario che:

- l'approssimazione delle deformazioni (e quindi tensioni) abbia lo stesso ordine delle pressioni;
- la conservazione della massa sia garantita.

Con questo approccio, però, il numero di incognite ed in particolare quelle legate al flusso, cresce enormemente nelle applicazioni reali.

Una discretizzazione numerica alternativa delle equazioni di Biot, che impone ancora la conservazione della massa, è stata ottenuta recentemente con un approccio ai volumi finiti [15,16,21]. Questi studi mostrano che per una corretta ricostruzione del gradiente di pressione all'interfaccia tra due materiali eterogenei è necessario che:

- l'approssimazione degli spostamenti abbia lo stesso ordine delle pressioni;
- ogni incognita sia definita su una griglia indipendente dalle altre, come illustrato in 1-D in Fig. B;
- i volumi discreti su cui si integrano le equazioni di Biot siano diversi per quanto riguarda l'equazione di equilibrio elastico e l'equazione di continuità del fluido.

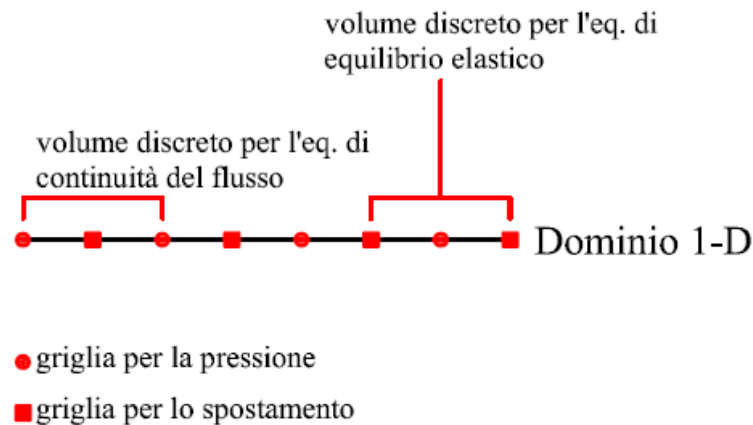


Fig. B: Discretizzazione spaziale nel modello a volumi finiti.

Le difficoltà principali di un tale approccio sono la definizione delle diverse griglie di calcolo per le diverse incognite e la definizione dei volumi di controllo, in particolar modo nei domini 3-D per l'applicazione su casi reali.

Obbiettivo della Tesi è quello di formulare un modello che mantenga la conservazione della massa, ma con un numero minore di incognite rispetto all'uso di elementi finiti misti e quindi un minor carico computazionale e che allo stesso tempo consenta una discretizzazione spaziale semplice del dominio. A tale scopo l'equazione che governa la conservazione della massa viene discretizzata con un approccio ai volumi finiti, mentre l'equazione dell'equilibrio elastico è discretizzata con un approccio variazionale classico agli elementi finiti. In questo modo le incognite del problema di flusso si riducono notevolmente pur garantendo la conservazione della massa.

La Tesi è strutturata come segue: dopo un breve cenno all'approccio ai volumi finiti viene descritta nel dettaglio la discretizzazione numerica delle equazioni che governano il problema, con un'attenzione particolare alla discretizzazione dell'equazione di continuità del fluido. Sono poi illustrati due diversi modelli per la descrizione del gradiente di pressione e viene effettuata una verifica di convergenza per entrambi nel caso di flusso stazionario e scheletro solido infinitamente rigido su diversi tipi di griglia di calcolo, sia in due che in tre dimensioni. Dopo aver scelto il modello ritenuto più efficace per il gradiente di pressione, si testa il modello accoppiato completo sia su alcuni problemi omogenei che eterogenei. Verrà evidenziato come la discretizzazione conservativa per mezzo dell'approccio ai volumi finiti eviti l'oscillazione dei valori di pressione all'interfaccia tra due materiali eterogenei in modo analogo a quanto accade con la formulazione agli elementi finiti misti. D'altra parte sorgeranno alcune complicazioni quali la dipendenza della soluzione dalla griglia di calcolo. In particolare una griglia di calcolo non adatta porta il modello a convergere ad una soluzione non corretta per quanto riguarda le pressioni. Sugli spostamenti lo scostamento risulta, invece, di un ordine di grandezza inferiore a quello della pressione con una accuratezza spesso accettabile in problemi realistici.

CENNI SUL METODO DEI VOLUMI FINITI

Il metodo dei volumi finiti è una tecnica mediante la quale la forma integrale delle leggi di conservazione, ovvero per un fluido il bilancio di massa, quantità di moto ed energia, può essere discretizzata direttamente nello spazio fisico [2]. La legge di conservazione in forma integrale per una quantità scalare U su un volume Ω di frontiera Γ , con f forzante di flusso ed \vec{F} termine di flusso sulla frontiera, si scrive:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega.$$

Il metodo dei volumi finiti è basato sui valori medi di U in un volume di controllo, e questo lo distingue dal metodo delle differenze finite e degli elementi finiti, dove le incognite sono localizzate in corrispondenza dei punti del reticolo. La discretizzazione spaziale è definita mediante un insieme di volumi di controllo Ω_j , su ciascuno dei quali si applica la legge di conservazione:

$$\oint_{\Gamma_j} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma}_j + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j = \int_{\Omega_j} f d\Omega_j.$$

Un aspetto favorevole del metodo ai volumi finiti è dato dal concetto di discretizzazione conservativa. Nell'analisi della meccanica dei fluidi è fondamentale la conservazione delle quantità di base (massa, quantità di moto ed energia) anche a livello discreto. Per tale motivo questa tecnica appare vantaggiosa in quanto soddisfa automaticamente la conservazione discreta proprio attraverso l'imposizione diretta della forma integrale delle leggi di conservazione. Un altro aspetto interessante del metodo dei volumi finiti è la sua grande flessibilità nella discretizzazione. Per un reticolo arbitrario c'è una vasta scelta di opzioni sulla definizione dei volumi di controllo su cui si applicano le leggi di conservazione, così come sulla definizione dei modelli per la stima dei flussi sulla frontiera di tali volumi. Dato un reticolo arbitrario, per la definizione dei volumi di controllo, si possono seguire due approcci: a cella centrale (cell-centered) e a vertici (cell-vertex). Nell'approccio a cella centrale le incognite sono definite al centro degli elementi del reticolo. Una scelta ovvia è quella di far coincidere i volumi di controllo con gli elementi stessi (Fig. C).

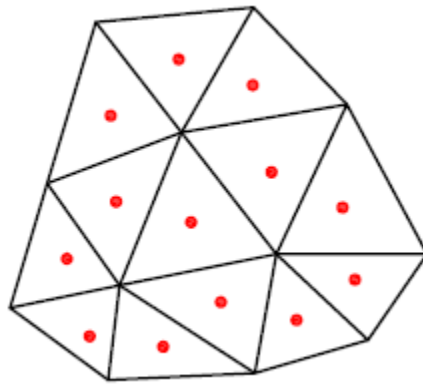


Fig. C: Possibile locazione delle incognite nel modello a cella centrale.

Nell'approccio a vertici le incognite sono definite nei punti del reticolo. Un possibile volume di controllo è quello definito dagli elementi che condividono uno stesso nodo (Fig. D).

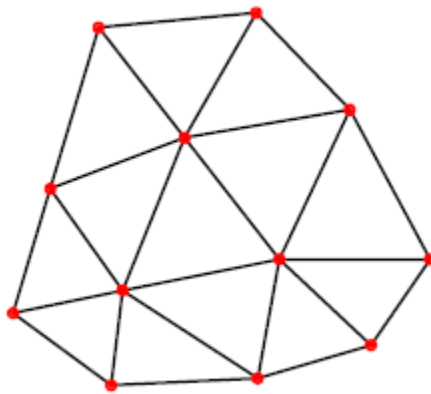


Fig. D: Possibile locazione delle incognite nel modello a vertici.

La scelta dei volumi è vincolata alle seguenti esigenze:

- La somma dei volumi di controllo deve coprire l'intero dominio, ovvero $\bigcup_{j=1, nv} \Omega_j = \Omega$, con nv il numero dei volumi di controllo.
- I volumi di controllo possono sovrapporsi ma i contributi di flusso delle frontiere interne alla sovrapposizione non devono essere presi in considerazione.

1. DESCRIZIONE DEL MODELLO PORO-ELASTICO ACCOPPIATO

INTRODUZIONE

1.1 EQUAZIONI DELLA PORO-ELASTICITÀ

1.2 DISCRETIZZAZIONE NUMERICA E IMPLEMENTAZIONE

1.2.1 FORMULAZIONE VARIAZIONALE DELL'EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

1.2.2 FORMULAZIONE AI VOLUMI FINITI DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DI MASSA

1.2.2.1 FORMA INTEGRALE CLASSICA DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DI MASSA

1.2.2.2 DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE E DEFINIZIONE DEI VOLUMI DI CONTROLLO

1.2.2.3 TRATTAMENTO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

1.2.2.4 DEFINIZIONE DEI MODELLI PER IL GRADIENTE DI PRESSIONE

1.2.2.5 STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE CON IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

1.2.2.6 MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE

1.2.2.7 STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE COME RAPPORTO INCREMENTALE

1.2.2.8 MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE

1.2.2.9 CREAZIONE DEI VETTORI DI CONNESSIONE

1.2.2.10 MATRICI DI CAPACITÀ LOCALI

1.2.3 INTEGRAZIONE NEL TEMPO

1.2.4 SOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO DI EQUAZIONI LINEARI

INTRODUZIONE

In questa sezione è descritto il procedimento di discretizzazione numerica delle equazioni differenziali alle derivate parziali che governano il flusso e la deformazione in un mezzo poroso saturo [11]. Particolare attenzione sarà riposta nell'approccio ai volumi finiti utilizzato per l'equazione di continuità del fluido.

1.1. EQUAZIONI DELLA POROELASTICITÀ

L'interazione tra il materiale granulare e il fluido che ne satura i pori è governata dall'equazione di equilibrio elastico accoppiata con l'equazione di continuità per il fluido, con le forze tra i grani legate alla pressione nei pori attraverso il principio di Terzaghi delle tensioni efficaci [10]. Questo sistema di equazioni è stato ricavato da Biot [11] assumendo per il mezzo poroso:

- isotropia del materiale;
- linearità delle relazioni di tensione-deformazione;

- piccole deformazioni;
- fluido incompressibile;
- validità della legge di Darcy per il flusso nei pori.

L'assunzione di isotropia e incompressibilità del fluido non sono essenziali e possono semplicemente essere introdotte l'anisotropia la compressibilità del fluido [6,8].

Si consideri ora un parallelepipedo elementare del mezzo poroso in esame, le corrispondenti tensioni totali sulle facce $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}]$ dovranno soddisfare le ben note condizioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

Ricordando l'ipotesi di piccole deformazioni, e assumendo con $[u_x, u_y, u_z]$ le componenti di spostamento, le deformazioni nell'elemento elementare $[\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]$ sono date da:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\end{aligned}$$

Per descrivere in maniera completa lo stato del mezzo poroso devono essere introdotte due variabili, rispettivamente di deformazione e di tensione. La variabile di deformazione θ è detta variazione di contenuto d'acqua e misura l'incremento di

volume di fluido nel mezzo poroso per unità di volume, mentre la variabile di tensione p è l'incremento di pressione nel fluido. Le deformazioni sono legate alle tensioni attraverso la legge di Hooke, opportunamente modificata per tener conto dello stato di tensione isotropo dato dalla pressione p :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \frac{p}{3H} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) + \frac{p}{3H} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{p}{3H}\end{aligned}\quad (1.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

dove E, G , e ν sono rispettivamente il modulo di Young, il modulo di taglio $G = E/2(1 + \nu)$ e il coefficiente di Poisson. H è invece una costante fisica addizionale.

La relazione più generale che lega θ alle componenti di tensione dà:

$$\theta = a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z + a_4\tau_{xy} + a_5\tau_{yz} + a_6\tau_{xz}\quad (1.3)$$

e ricordando l'ipotesi di isotropia del materiale $a_1 = a_2 = a_3$ e $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ quindi la (1.3) si può riscrivere come:

$$\theta = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3H} + \frac{p}{R}\quad (1.4)$$

con R una costante fisica addizionale. Riscrivendo ora la (1.2) rispetto alle tensioni si trova:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) - \alpha p \\ \sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) - \alpha p \\ \sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu\varepsilon}{1-2\nu}\right) - \alpha p\end{aligned}\quad (1.5)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\text{con } \alpha = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \frac{G}{H} \text{ e } \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ e la (1.4) diventa:}$$

$$\theta = \alpha\varepsilon + \frac{p}{Q} \quad (1.6)$$

$$\text{con } \frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}. \text{ Il coefficiente di Biot } \alpha \text{ misura il rapporto tra il volume di fluido}$$

uscente dal mezzo poroso e la variazione di volume di quest'ultimo quando $p=0$. Invece

il coefficiente $\frac{1}{Q}$ misura la quantità d'acqua che può essere immagazzinata nel mezzo

poroso sotto pressione quando $\varepsilon=0$. In definitiva l'equazione di un mezzo poro-elastico isotropo scritta in termini di spostamento si ricava sostituendo la (1.5) nell'equazione (1.1):

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u_x + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ G\nabla^2 u_y + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ G\nabla^2 u_z + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\text{con } \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2. \text{ Posto } \vec{u} = [u_x, u_y, u_z], \quad \varepsilon = \text{div}(\vec{u}) \quad \text{e}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{ la (1.7) si può riscrivere in forma compatta come:}$$

$$G\nabla^2 \vec{u} + (\lambda + G)\nabla \text{div}(\vec{u}) = \alpha \nabla p \quad (1.8)$$

$$\text{Definendo ora con } \vec{v} = \left[-k \frac{\partial p}{\partial x}, -k \frac{\partial p}{\partial y}, -k \frac{\partial p}{\partial z} \right] \text{ la velocità secondo Darcy e con } k \text{ il}$$

coefficiente di permeabilità del terreno, e ricordando l'ipotesi di incompressibilità del fluido, la variazione nel tempo di θ è data da:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (1.9)$$

e combinando la (1.9) con la (1.6) si ottiene l'equazione di continuità del fluido:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Più in generale, rimuovendo l'ipotesi di isotropia e incompressibilità del fluido [6,8], le (1.8, 1.10) diventano rispettivamente:

$$G \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + G) \nabla \operatorname{div}(\vec{u}) = \alpha \nabla p + \vec{b} \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} [\phi \beta p + \alpha \operatorname{div}(\vec{u})] = f \quad (1.12)$$

con \vec{b} il vettore delle forze esterne, ϕ è la porosità del mezzo, β la compressibilità del fluido ed f la forzante di flusso. I coefficienti ϕ , α e β si assumono costanti nel tempo.

Nel caso di materiale anisotropo la legge di Darcy definisce \vec{v} come:

$$\vec{v} = -[K'] \nabla p \quad (1.13)$$

con $[K'] = [K]/(\rho g)$, $[K]$ tensore della conducibilità idraulica e (ρg) peso di volume del fluido.

Le (1.11) e (1.12) formano un sistema accoppiato di equazioni differenziali alle derivate parziali definito su un dominio Ω (in \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3) di frontiera Γ con \vec{u} e p come incognite. Questo sistema può essere risolto con appropriate condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{u}_D(\vec{x}, t) && \text{su } \Gamma_D \\ [\sigma_{\text{tot}}](\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) &= \vec{t}_N(\vec{x}, t) && \text{su } \Gamma_N \\ p(\vec{x}, t) &= p_D(\vec{x}, t) && \text{su } \Gamma_p \\ \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}) &= q_N(\vec{x}, t) && \text{su } \Gamma_q \end{aligned} \quad (1.14)$$

e condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, 0) &= \vec{u}_0(\vec{x}) \\ p(\vec{x}, 0) &= p_0(\vec{x}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nelle equazioni (1.14) e (1.15) $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma_p \cup \Gamma_q = \Gamma$, $[\sigma_{\text{tot}}]$ è il tensore delle tensioni totali, \vec{n} la normale uscente da Γ e \vec{x} il vettore posizione (in \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3) mentre i termini a secondo membro sono funzioni assegnate.

1.2. DISCRETIZZAZIONE NUMERICA E IMPLEMENTAZIONE

Per la soluzione numerica dell'equazione dell'equilibrio elastico si segue un approccio variazionale classico con discretizzazione mediante elementi finiti. L'approccio ai volumi finiti è invece riservato all'equazione che governa il flusso nei pori.

1.2.1. FORMULAZIONE VARIAZIONALE DELL'EQUAZIONE DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Lo spostamento medio $\vec{u}(\vec{x}, t)$ è approssimato nello spazio funzionale generato dai polinomi lineari continui a tratti N_i , $i = 1, \dots, n_n$ con n_n il numero di nodi del reticolo che discretizzano il dominio Ω . In \mathbf{R}^2 si ha:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} \hat{u}_x(\vec{x}, t) \\ \hat{u}_y(\vec{x}, t) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n_n} N_i(\vec{x}) \cdot u_{x,i}(t) \\ \sum_{i=1}^{n_n} N_i(\vec{x}) \cdot u_{y,i}(t) \end{bmatrix} = [N_u](\vec{x}) \cdot \vec{u}(t)$$

dove $[N_u]$ è una matrice di dimensione $[2 \times 2m]$ con m il numero di nodi appartenente all'elemento esaminato. La pressione del fluido nei pori $p(\vec{x}, t)$ è invece approssimata mediante funzioni costanti a tratti. Definendo con n_e il numero di elementi si pone:

$$p(\vec{x}, t) \cong \sum_{j=1}^{n_e} h_j(\vec{x}) \cdot p_j(t) = \vec{h}_j^T \bullet \vec{p}(t) \quad (1.16)$$

dove h_j sono funzioni di forma relative all' j -esimo elemento T^j definite come:

$$h_j(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in T^j \\ 0 & \vec{x} \notin T^j \end{cases} \quad (1.17)$$

I vettori $\vec{u}(t)$ e $\vec{p}(t)$ le cui componenti sono gli spostamenti nodali $u_{x,i}$, $u_{y,i}$ con $i = 1, \dots, n_n$ e la pressione p_j , $j = 1, \dots, n_e$ sono le incognite discrete.

Una forma debole dell'equazione (1.11) è stata ottenuta minimizzando l'energia potenziale totale nel dominio Ω con l'ausilio del principio dei lavori virtuali, imponendo l'uguaglianza tra il lavoro di deformazione compiuto dagli sforzi interni L_i a quello compiuto dalle forze esterne L_e [4,18] $L_i = L_e$. Esplicitando:

$$L_i = \int_{\Omega} \vec{\varepsilon}^{v,T} \cdot \vec{\sigma}_{tot} \cdot d\Omega \quad (1.18)$$

$$L_e = \int_{\Omega} \vec{u}^{v,T} \cdot \vec{b} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{u}^{v,T} \cdot \vec{t}_N \cdot d\Gamma \quad (1.19)$$

dove $\vec{\varepsilon}$ è il vettore delle componenti di deformazione ($=[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T = [B_u] \vec{u}$ e $[B_u]$ la matrice elastica della deformazione di dimensione $[3 \times 2m]$), $\vec{\sigma}_{tot}$ il vettore delle tensioni totali ($=[\sigma_{x,tot}, \sigma_{y,tot}, \tau_{xy,tot}]^T$), l'apice "v" denota le variabili virtuali. Le tensioni totali sono espresse mediante il principio di Terzaghi delle tensioni efficaci:

$$\vec{\sigma}_{tot} = \vec{\sigma} - \alpha p \vec{i}$$

dove $\vec{\sigma}$ è il vettore delle tensioni efficaci ($=[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T = [D_e] \vec{\varepsilon}$ e $[D_e]$ la matrice delle costanti elastiche di dimensione $[3 \times 3]$) e \vec{i} il delta di Kronecker in forma vettoriale. Nel caso di elemento triangolare (Fig 1.1) le matrici $[N_u]$ e $[B_u]$ si possono esplicitare in funzione delle coordinate nodali. Detta Δ l'area del triangolo i,j,m (Fig. 1.1) si ha:

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

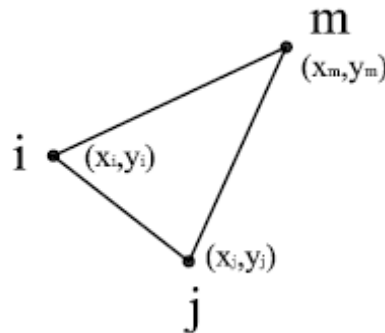


Fig. 1.1: Elemento triangolare per un continuo in stato piano.

e definendo:

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = y_j - y_m$$

$$c_i = x_m - x_j$$

con gli altri coefficienti ottenuti con una permutazione ciclica nell'ordine i, j, m si possono esplicitare:

$$[N_u] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

$$\text{con } N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta};$$

$$[B_u] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

Le (1.18) e (1.19) si possono riscrivere come:

$$L_i = \int_{\Omega} \vec{\varepsilon}^{v,T} \cdot \vec{\sigma} \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\varepsilon}^{v,T} \cdot \alpha p \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \vec{u}^{v,T} \cdot [B_u]^T [D_e][B_u] d\Omega \cdot \vec{u} - \int_{\Omega} \vec{u}^{v,T} \cdot \alpha [B_u]^T \vec{i} \cdot p \cdot d\Omega$$

$$L_e = \int_{\Omega} \vec{u}^{v,T} \cdot [N_u]^T \vec{b} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_N} \vec{u}^{v,T} \cdot [N_u]^T \vec{t}_N \cdot d\Gamma$$

L'uguaglianza $L_i = L_e$ deve valere per qualsiasi spostamento virtuale e questo rende

lecita la semplificazione del vettore $\vec{u}^{v,T}$ che produce il risultato:

$$\int_{\Omega} [B_u]^T [D_e][B_u] d\Omega \cdot \vec{u} - \int_{\Omega} \alpha [B_u]^T \vec{i} p \cdot d\Omega = \int_{\Omega} [N_u]^T \vec{b} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_N} [N_u]^T \vec{t}_N \cdot d\Gamma \quad (1.20)$$

La forma discreta finale dell'equazione (1.11) si ottiene introduce l'approssimazione della pressione (1.17) nell'equazione (1.20):

$$[K]\vec{u} - [Q]\vec{p} = \vec{f}_1 \quad (1.21)$$

dove:

$$[K] = \int_{\Omega} [B_u]^T [D_e][B_u] d\Omega \text{ di dimensione } [2n_n \times 2n_n];$$

$$[Q] = \int_{\Omega} \alpha [B_u]^T \vec{i} \cdot \vec{h}^T \cdot d\Omega \text{ di dimensione } [2n_n \times n_e];$$

$$\vec{f}_1 = \int_{\Omega} [N_u]^T \vec{b} \cdot d\Omega + \int_{\Gamma_N} [N_u]^T \vec{t}_N \cdot d\Gamma$$

Le condizioni al contorno di Dirichlet lungo Γ_D sono prescritte in maniera forte.

1.2.2. FORMULAZIONE AI VOLUMI FINITI DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DI MASSA

1.2.2.1. FORMA INTEGRALE CLASSICA DELL'EQUAZIONE DEL BILANCIO DI MASSA

Il metodo ai volumi finiti permette di discretizzare direttamente nello spazio fisico la forma integrale dell'equazione di bilancio di massa [2]. L'equazione (1.12) integrata sull'intero dominio Ω di frontiera Γ dà:

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{v}) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\phi\beta p)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\alpha \text{div}(\vec{u}))}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega$$

La forma classica si ottiene applicando il teorema della divergenza di Gauss al primo integrale e raccogliendo la derivata rispetto al tempo negli altri integrali a primo membro:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega \quad (1.22)$$

Dove $\vec{F} = \vec{v}$ e $U = \phi\beta p + \text{div}(\vec{u})$.

1.2.2.2. DISCRETIZZAZIONE SPAZIALE E DEFINIZIONE DEI VOLUMI DI CONTROLLO

Nell'approccio ai volumi finiti il primo passo è la suddivisione del dominio Ω in volumi di controllo Ω_j su cui applicare la (1.22):

$$\oint_{\Gamma_j} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma}_j + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j = \int_{\Omega_j} f d\Omega_j \quad (1.23)$$

Il modello implementato segue un approccio a cella centrale (cell-centered approach) in cui i volumi di controllo coincidono con gli elementi definiti dai nodi del reticolo di calcolo utilizzato per l'equazione dell'equilibrio poro-elastico. In questo modo le incognite sono definite come valore medio nell'elemento e l'approssimazione della pressione è la stessa della discretizzazione variazionale (1.17).

Nella forma discreta dell'equazione (1.23) gli integrali di volume sono calcolati utilizzando il valore medio sul volume di controllo e l'integrale di superficie è

rimpiazzato dalla somma dei contributi ottenuti su tutte le facce dell'elemento.

Definendo con nf_j il numero di facce dell'elemento j-esimo si ha:

$$\sum_{k=1, nf_j} \vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_j \cdot \Omega_j) = f_j \Omega_j \quad (1.24)$$

dove \vec{F}_k e $\vec{\Delta\Gamma}_k$ sono rispettivamente il flusso attraverso la faccia k-esima e l'area con verso della faccia, $\bar{U}_j = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} U d\Omega_j$ è il valor medio di U sull'elemento j-esimo, f_j è la forzante di portata media nel j-esimo volume di controllo.

1.2.2.3. TRATTAMENTO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO

Le condizioni di Dirichlet lungo Γ_D sono prescritte in maniera forte. Le condizioni di Neumann lungo Γ_N sono trattate in maniera naturale. Se la k-esima faccia giace sul contorno Γ_N allora il contributo $\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k$ è noto e viene assemblato a termine noto. Quando il flusso \vec{F}_k è nullo la condizione di Neumann è naturalmente rispettata, se il flusso è invece imposto la forzante esterna diventa $f_j \Omega_j - \vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k$.

1.2.2.4. DEFINIZIONE DEI MODELLI PER LA STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE

Riprendendo la legge di Darcy (1.13), e imponendo che gli assi di riferimento siano diretti secondo le direzioni principali di anisotropia del mezzo poroso, la sommatoria a primo membro dell'equazione (1.12), nelle due e tre dimensioni, diventa:

$$\sum_{k=1, nf_j} \vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k = \begin{cases} \sum_{k=1, nf_j} \left(-k_{xx} \frac{\partial p}{\partial x}, -k_{yy} \frac{\partial p}{\partial y} \right)_k \bullet (\Delta\Gamma_x, \Delta\Gamma_y)_k \\ \sum_{k=1, nf_j} \left(-k_{xx} \frac{\partial p}{\partial x}, -k_{yy} \frac{\partial p}{\partial y}, -k_{zz} \frac{\partial p}{\partial z} \right)_k \bullet (\Delta\Gamma_x, \Delta\Gamma_y, \Delta\Gamma_z)_k \end{cases} \quad (1.25)$$

Il gradiente di pressione attraverso una faccia è stato modellato seguendo due diversi approcci. Il primo stima il gradiente con l'ausilio del teorema della divergenza di Gauss,

modello già implementato con successo per risolvere le equazioni di Stokes [1,17], mentre il secondo è una semplice stima del gradiente come rapporto incrementale tra i valori di pressione di due elementi contigui. Quest'ultimo è stato recentemente implementato con successo per la soluzione del problema poro-elastico monodimensionale [15,16,21].

1.2.2.5. STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE CON IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA DI GAUSS

Il gradiente di pressione attraverso una faccia è stimato come media aritmetica del gradiente medio sui due elementi che la condividono, con il gradiente medio sull'elemento calcolato mediante il teorema della divergenza di Gauss. Per semplicità di esposizione si tratta il caso nelle due dimensioni. La definizione di gradiente medio di pressione sull'elemento Ω_j dà:

$$\overline{\nabla p_j} = \begin{cases} \left(\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} \right)_j = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega_j \\ \left(\overline{\frac{\partial p}{\partial y}} \right)_j = \frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega_j \end{cases} \quad (1.26)$$

Applicando il teorema della divergenza di Gauss alla (1.26) si ottiene:

$$\overline{\nabla p_j} = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_j} \oint_{\Gamma_j} p \vec{i}_x \cdot d\vec{\Gamma}_j \\ \frac{1}{\Omega_j} \oint_{\Gamma_j} p \vec{i}_y \cdot d\vec{\Gamma}_j \end{cases} \quad (1.27)$$

con \vec{i}_x e \vec{i}_y i versori in x ed y rispettivamente. Discretizzando l'integrale di superficie della (1.27) e definito con nf_j il numero di facce dell'elemento j-esimo:

$$\overline{\nabla p_j} = \frac{1}{\Omega_j} \sum_{k=1, nf} p_{f_k} (\Gamma_x, \Gamma_y)_k \quad (1.28)$$

dove p_{f_k} e $(\Gamma_x, \Gamma_y)_k$ sono rispettivamente la pressione e l'area con verso uscente dall'elemento della k-esima faccia dell'elemento j-esimo. La pressione sulla faccia p_{f_k} è data dalla media aritmetica della pressione sui nodi della faccia stessa, detti n_1 ed n_2 :

$$p_{r_k} = \frac{p_{n_1} + p_{n_2}}{2} \quad (1.29)$$

La pressione sul nodo n_i -esimo p_{n_i} è infine calcolata con una media pesata che coinvolge il valore di pressione di tutti gli elementi che hanno in comune il nodo n_i . La media è pesata sull'inverso della distanza tra il nodo e il baricentro del m -esimo elemento, r_{i-m} . Definito con n_{e-i} il numero degli elementi connessi al nodo n_i -esimo si ottiene:

$$p_{n_i} = \frac{\sum_{m=1, n_{e-i}} p_m / r_{i-m}}{\sum_{m=1, n_{e-i}} 1 / r_{i-m}} \quad (1.30)$$

Per come è formulato il modello la stima del gradiente di pressione sulla faccia k -esima coinvolge tutti gli elementi che condividono almeno un nodo con uno dei due elementi che hanno in comune la faccia. Ad esempio, in Fig. 1.2 sono evidenti tutti gli elementi che contribuiscono alla stima del gradiente medio su Ω_j cui appartiene la faccia k .

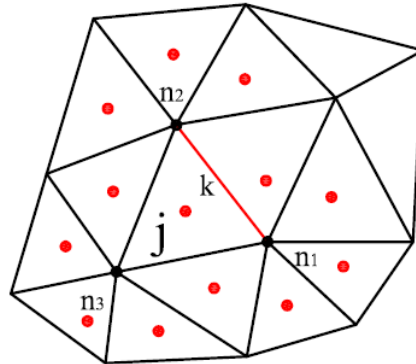


Fig. 1.2: Elementi che contribuiscono alla stima del gradiente medio su Ω_j .

In Fig. 1.3 sono invece evidenziati tutti gli elementi che contribuiscono alla stima del gradiente medio su Ω_{jj} , che condivide con Ω_j la faccia k .

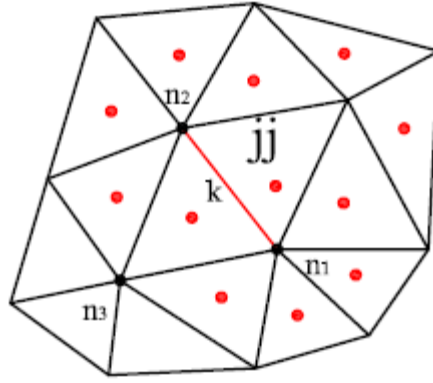


Fig. 1.3: Elementi che contribuiscono alla stima del gradiente medio su Ω_{jj} .

In definitiva in Fig. 1.4 sono evidenziati tutti gli elementi che contribuiscono alla stima del gradiente sulla k -esima faccia.

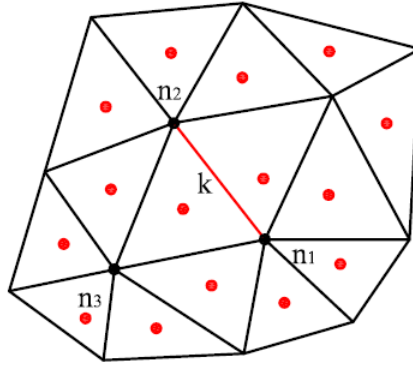


Fig. 1.4: Elementi che contribuiscono alla stima del gradiente sulla k -esima faccia.

Detto $\{p\}_k$ un vettore di $n_{\text{tot}-k}$ componenti contenente tutti i valori di pressione degli elementi che hanno almeno un nodo in comune con l'elemento Ω_j o Ω_{jj} , la (1.30) si può scrivere come:

$$p_{n_i} = \left\{ f\left(\frac{1}{r}\right) \right\}_{n_i} \bullet \{p\}_k \quad (1.30b)$$

Con $\left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_i}$ un vettore di $n_{\text{tot-k}}$ componenti funzione dell'inverso della distanza tra il

baricentro degli $n_{\text{tot-k}}$ elementi e il nodo n_i . La componente di $\left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_i}$ è nulla

quando l'elemento non è connesso al nodo n_i . Ne consegue che la (1.29) diventa:

$$p_{f_k} = \left\{ \frac{\left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_1} + \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_2}}{2} \right\} \bullet \{p\}_k = \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_1, n_2} \bullet \{p\}_k = \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_k \bullet \{p\}_k \quad (1.29b)$$

e infine la (1.16) risulta:

$$\overline{\nabla p_j} = \frac{1}{\Omega_j} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_j = \left\{ \Delta\Gamma_{x-n_1, n_2} \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_1, n_2} + \Delta\Gamma_{x-n_1, n_3} \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_1, n_3} + \Delta\Gamma_{x-n_2, n_3} \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_2, n_3} \right\} \bullet \{p\}_k \right. \\ \left. \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_j = \left\{ \Delta\Gamma_{y-n_1, n_2} \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_1, n_2} + \Delta\Gamma_{y-n_1, n_3} \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_1, n_3} + \Delta\Gamma_{y-n_2, n_3} \left\{f\left(\frac{1}{r}\right)\right\}_{n_2, n_3} \right\} \bullet \{p\}_k \right\}$$

con $(\Delta\Gamma_{x-n_1, n_2}, \Delta\Gamma_{y-n_1, n_2})$ il vettore area della faccia di nodi n_1 e n_2 . In modo compatto

la precedente può essere scritta anche come:

$$\overline{\nabla p_j} = \left\{ \left\{ f\left(\frac{1}{\Omega_j}, \frac{1}{r}, \Delta\Gamma_x\right) \right\} \bullet \{p\}_k \right. \\ \left. \left\{ f\left(\frac{1}{\Omega_j}, \frac{1}{r}, \Delta\Gamma_y\right) \right\} \bullet \{p\}_k \right\} \quad (1.28b)$$

dove $f\left(\frac{1}{\Omega_j}, \frac{1}{r}, \Delta\Gamma\right)$ è un vettore di $n_{\text{tot-k}}$ componenti funzione della geometria di Ω_j e

dell'inverso della distanza tra i baricentri degli elementi che condividono almeno un nodo con Ω_j e il nodo stesso condiviso.

1.2.2.6. MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE

Definiti con nf il numero di facce nel dominio Ω e con $[G]$ la matrice globale di rigidità per l'equazione di continuità del fluido a moto stazionario calcolata con il modello della divergenza di Gauss, la (1.25) applicata a tutti i volumi di controllo diventa:

$$\sum_{k=1, nf} \vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k = [G] \vec{p} \quad (1.31)$$

Ciascun contributo locale alla matrice $[G]$ è dunque il k -esimo termine della sommatoria (1.31), cioè $\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k$. La matrice globale $[G]$ è quindi calcolata facendo un ciclo su tutte le facce del reticolo di calcolo a meno di quelle poste sul contorno Γ_N (vedi paragrafo 1.2.2.3). Perché la massa si conservi il prodotto $\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k$ deve essere assemblato con segno opposto nel bilancio dei due elementi che condividono la faccia k . Per convenzione si assume il segno positivo per l'elemento con il vettore $\vec{\Delta\Gamma}_k$ di verso uscente dall'elemento stesso.

L'algoritmo implementato risulta:

- 1 CICLO per $k=1, nf$
- 2 SE $k=faccia$ sul contorno VAI A 15
- 3 Calcolo la conducibilità idraulica media tra gli elementi j e jj
- 4 Individuo gli n_{tot-k} elementi
- 5 CICLO per $m=1,2$
- 6 SE $m=1$ impongo $mm=j$ ALTRIMENTI $mm=jj$
- 7 Calcolo $\left\{ f\left(\frac{1}{r}\right) \right\}_{n_i}$ nei nodi dell'elemento mm (1.30b)
- 8 Calcolo $\left\{ f\left(\frac{1}{r}\right) \right\}_k$ sulle facce dell'elemento mm (1.29b)

9

griglie strutturate.

1.2.2.7. STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE COME RAPPORTO INCREMENTALE

una direzione \mathbf{r} si ha che $\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta \mathbf{r}} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}}$. Questo modello approssima il gradiente di

pressione in una direzione con il rapporto incrementale $\frac{\partial p}{\partial r} \cong \frac{\Delta p}{\Delta r}$. Tale approssimazione

risulta tanto migliore quanto più il reticolo di calcolo è fine, ovvero $\Delta r \rightarrow 0$, essendo r la direzione che collega i centroidi dei due elementi j e jj , Δr la distanza tra i centroidi ($\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$) e $\Delta p = p_{jj} - p_j$ (Fig. 1.5).

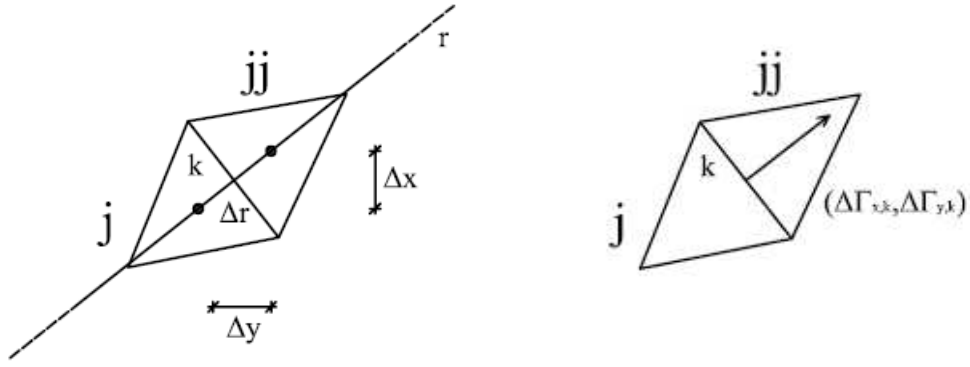


Fig. 1.5: Convenzioni assunte per il modello di gradiente come rapporto incrementale.

Sviluppando il contributo k-esimo della sommatoria(1.25) si ha:

$$\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k = - \left(\frac{k_x}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \Delta\Gamma_x \right)_k - \left(\frac{k_y}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \Delta\Gamma_y \right)_k \cong - \frac{k_{x,k}}{\rho g} \frac{p_{jj} - p_j}{x_{jj} - x_j} \Delta\Gamma_{x,k} - \frac{k_{y,k}}{\rho g} \frac{p_{jj} - p_j}{y_{jj} - y_j} \Delta\Gamma_{y,k}$$

$$\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k \cong \frac{1}{\rho g} \left(\frac{k_{x,k} \Delta\Gamma_{x,k}}{x_{jj} - x_j} + \frac{k_{y,k} \Delta\Gamma_{y,k}}{y_{jj} - y_j}, - \frac{k_{x,k} \Delta\Gamma_{x,k}}{x_{jj} - x_j} - \frac{k_{y,k} \Delta\Gamma_{y,k}}{y_{jj} - y_j} \right) \bullet (p_j, p_{jj})$$

Le conducibilità idrauliche sono stimate come media aritmetica dei valori nei due elementi:

$$k_{x,k} = \frac{k_{x,j} + k_{x,jj}}{2}$$

$$k_{y,k} = \frac{k_{y,j} + k_{y,jj}}{2}$$

1.2.2.8. MATRICE DI RIGIDEZZA LOCALE

Definiti con nf il numero di facce nel dominio Ω e con $[V]$ la matrice di rigidità globale per l'equazione di continuità del fluido a moto stazionario calcolata con il modello del rapporto incrementale, la (1.25) applicata a tutti i volumi di controllo diventa:

$$\sum_{k=1, nf} \vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k = [V] \vec{p} \quad (1.32)$$

Al solito, il contributo locale alla matrice $[V]$ è il k-esimo termine della sommatoria (1.32) $\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k$. La matrice globale $[V]$ è quindi calcolata facendo un ciclo su tutte le facce del reticolo di calcolo a meno di quelle che si trovano sul contorno (vedi paragrafo 1.2.2.3). Come nel caso del precedente modello, perché la massa si conservi il prodotto $\vec{F}_k \bullet \vec{\Delta\Gamma}_k$ deve essere assemblato con segno opposto nel bilancio dei due elementi che condividono la faccia k. Per convenzione si assume segno positivo per l'elemento che ha il vettore $\vec{\Delta\Gamma}_k$ di verso uscente dall'elemento stesso.

L'algoritmo implementato risulta (Fig. 1.5):

- 1 CICLO per k=1, nf
- 2 SE k=faccia sul contorno VAI A 8
- 3 Calcolo la conducibilità idraulica media tra gli elementi j e jj
- 4 Calcolo l'area della faccia k $(\Delta\Gamma_{x,k}, \Delta\Gamma_{y,k})$
- 5 Calcolo $\Delta x = x_{jj} - x_j$ e $\Delta y = y_{jj} - y_j$
- 6 Assemblo $V(j, j) = \frac{k_{x,k}}{\rho g} \frac{\Delta\Gamma_x}{\Delta x} + \frac{k_{y,k}}{\rho g} \frac{\Delta\Gamma_y}{\Delta y}$ e $V(j, jj) = -V(j, j)$
- 7 Assemblo $V(jj, jj) = -V(j, jj) = V(j, j)$ e $V(jj, j) = -V(j, j) = V(j, jj)$
- 8 Fine CICLO per k

L'algoritmo può risultare mal condizionato quando i valori di Δx e Δy tendono a zero.

Un approccio più accurato consiste nel calcolare:

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta r} \frac{\Delta\Gamma_{x,k}}{\sqrt{\Delta\Gamma_{x,k}^2 + \Delta\Gamma_{y,k}^2}} \text{ e } \frac{1}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta r} \frac{\Delta\Gamma_{y,k}}{\sqrt{\Delta\Gamma_{x,k}^2 + \Delta\Gamma_{y,k}^2}}$$

La matrice globale $[V]$ ha dimensione $[n_{el} \times n_{el}]$ e risulta simmetrica e non singolare.

1.2.2.9. CREAZIONE DEI VETTORI DI CONNESSIONE

Per una implementazione efficiente dei modelli visti ai paragrafi 1.2.2.5-6 è utile predisporre di 4 vettori contenenti le connessioni reciproche tra nodi, elementi e facce. Elaborando i dati in ingresso delle coordinate nodali e della topologia degli elementi si ha:

- Connessione *facce-nodi* di dimensione (n° di facce x n° nodi per faccia): indica per ogni faccia i nodi che la compongono.
- Connessione *facce-elementi* di dimensione (n° di facce x 2): indica la coppia di elementi che condividono una faccia. La coppia di elementi è ordinata in modo tale che il vettore area della faccia, calcolato con l'ordinamento dei nodi dato dal vettore *facce-nodi*, sia uscente dal primo elemento della coppia.
- Connessione *elementi-facce* di dimensione (n° di elementi x n° di facce per elemento): indica le facce che compongono la frontiera dell'elemento.
- Connessione *nodi-elementi* di dimensione (n° di nodi x n° di elementi connessi al nodo+1): indica per ogni nodo il n° di elementi connessi e la lista di questi elementi.

1.2.2.10. MATRICI DI CAPACITÀ LOCALI

Il secondo termine a primo membro dell'equazione (1.22) risulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{U}_j \cdot \Omega_j) = (\phi\beta)_j \Omega_j \frac{\partial p_j}{\partial t} + \left(\alpha \vec{i}[B_u] \right)_j \Omega_j \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t} = [P]_{jj} \frac{\partial p_j}{\partial t} + [Q^*]_j \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial t}$$

dove $[P]_{jj}$ è uno scalare mentre $[Q^*]_j$ è un vettore riga $[1 \times (n^\circ_{\text{dimensioni}} \cdot m)]$ con m il numero di nodi dell'elemento esaminato. Le matrici globali $[P]$ e $[Q^*]$ risultanti dalla

somma dei contributi locali per $j = 1, n_e$ sono rispettivamente una matrice diagonale di ordine $[n_e]$ e una matrice rettangolare di dimensione $[n_e \times (n_{\text{dimensioni}} \cdot m)]$.

La discretizzazione spaziale adottata è a cella centrale ed i volumi di controllo coincidono con gli elementi. Ricordando ora la definizione della funzione di forma h_j (1.17), la trasposta della matrice $[Q^*]$ si può scrivere:

$$[Q^*]^T = \int_{\Omega} \alpha [B_u]^T \dot{\mathbf{i}} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \alpha [B_u]^T \dot{\mathbf{i}} \cdot \vec{h}^T \cdot d\Omega = [Q]$$

ovvero le due matrici di accoppiamento sono una la trasposta dell'altra e si può porre $[Q^*] = [Q]^T$.

1.2.3. INTEGRAZIONE NEL TEMPO

Il sistema di equazioni dato dalla (1.11) e (1.12) discretizzato come detto nei paragrafi precedenti diventa:

$$\begin{aligned} [K]\vec{u} - [Q]\vec{p} &= \vec{f}_1 \\ [F]\vec{p} + [P]\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + [Q]^T \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \vec{f}_2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

con $[F]$ matrice di rigidità dipendente dal tipo di modello di discretizzazione del gradiente di pressione (1.31-32) ed \vec{f}_2 vettore delle forzanti di flusso esterne. Il sistema di equazioni differenziali ordinarie nel tempo (1.33) è integrato con uno schema alle differenze finite. Supponiamo che tutte le funzioni dipendenti dal tempo varino linearmente tra due istanti calcolo successivi t e $t + \Delta t$ e approssimiamo ogni derivata rispetto al tempo con un rapporto incrementale all'istante intermedio τ :

$$\tau = \vartheta(t + \Delta t) + (1 - \vartheta)t \quad (1.34)$$

Nell'equazione (1.34) ϑ è un valore scalare compreso tra 0 e 1. Viene così ottenuto il sistema discreto:

$$\begin{aligned}
& [K] \cdot \left(\vec{u}^t + \vartheta \left(\vec{u}^{t+\Delta t} - \vec{u}^t \right) \right) - [Q] \cdot \left(\vec{p}^t + \vartheta \left(\vec{p}^{t+\Delta t} - \vec{p}^t \right) \right) = \vec{f}_1^t + \vartheta \left(\vec{f}_1^{t+\Delta t} - \vec{f}_1^t \right) \\
& [F] \cdot \left(\vec{p}^t + \vartheta \left(\vec{p}^{t+\Delta t} - \vec{p}^t \right) \right) + [P] \frac{\vec{p}^{t+\Delta t} - \vec{p}^t}{\Delta t} + [Q]^T \frac{\vec{u}^{t+\Delta t} - \vec{u}^t}{\Delta t} = \vec{f}_2^t + \vartheta \left(\vec{f}_2^{t+\Delta t} - \vec{f}_2^t \right)
\end{aligned}$$

Raccogliendo a primo membro le incognite al tempo $t + \Delta t$ si ricava:

$$\begin{aligned}
& \vartheta [K] \vec{u}^{t+\Delta t} - \vartheta [Q] \vec{p}^{t+\Delta t} = (1 - \vartheta) \cdot \left([Q] \vec{p}^t - [K] \vec{u}^t + \vec{f}_1^t \right) + \vartheta \vec{f}_1^{t+\Delta t} \\
& [Q]^T \vec{u}^{t+\Delta t} + (\Delta t \vartheta [F] + [P]) \vec{p}^{t+\Delta t} = \Delta t (1 - \vartheta) \cdot \left(-[F] \vec{p}^t + \vec{f}_2^{t+\Delta t} \right) + [P] \vec{p}^t + [Q]^T \vec{u}^{t+\Delta t} + \Delta t \vartheta \vec{f}_2^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

La soluzione numerica al tempo $t + \Delta t$ è calcolata risolvendo il sistema algebrico lineare:

$$[A] \vec{z}^{t+\Delta t} = \vec{f}^t \quad (1.35)$$

dove

$$[A] = \begin{bmatrix} \vartheta [K] & -\vartheta [Q] \\ [Q]^T & \Delta t \vartheta [F] + [P] \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

$$\vec{z}^{t+\Delta t} = \begin{Bmatrix} \vec{u}^{t+\Delta t} \\ \vec{p}^{t+\Delta t} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{f}^t = \begin{Bmatrix} \vec{f}^{(u)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{Bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}
\vec{f}^{(u)} &= (1 - \vartheta) \cdot \left([Q] \vec{p}^t - [K] \vec{u}^t + \vec{f}_1^t \right) + \vartheta \vec{f}_1^{t+\Delta t} \\
\vec{f}^{(p)} &= \Delta t (1 - \vartheta) \cdot \left(-[F] \vec{p}^t + \vec{f}_2^{t+\Delta t} \right) + [P] \vec{p}^t + [Q]^T \vec{u}^{t+\Delta t} + \Delta t \vartheta \vec{f}_2^{t+\Delta t}
\end{aligned}$$

La matrice $[A]$ è una matrice quadrata sparsa non simmetrica di ordine $\left[(n_{\text{dimensioni}}^o \cdot n_{\text{nodi}}^o) + n_{\text{elementi}}^o \right]$.

1.2.4. SOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO DI EQUAZIONI LINEARI

In questo studio non è stato affrontato il problema di formulare uno specifico algoritmo per una soluzione iterativa del sistema algebrico di equazioni lineari (1.35) nel caso di

problemi di dimensioni elevate. Si utilizzerà pertanto una tecnica diretta di libreria con il pacchetto software PARDISO [19] disponibile nella libreria MKL del compilatore FORTRAN per macchine Intel. La libreria PARDISO include solutori diretti per matrici sparse simmetriche o non-simmetriche (Fig. 1.6).

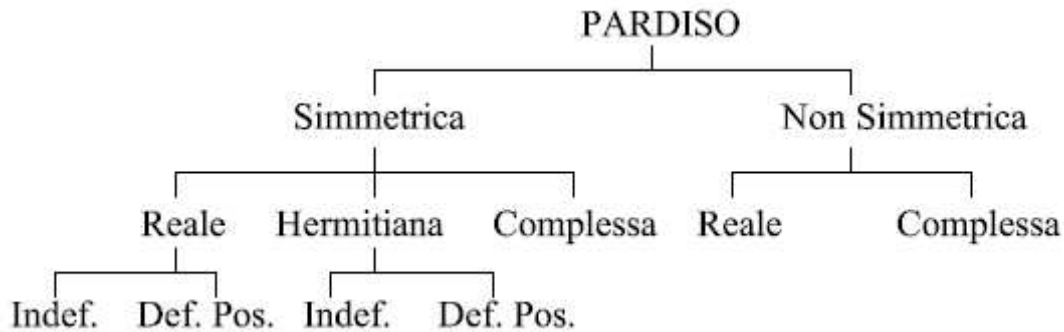


Fig. 1.6: Solutori diretti PARDISO.

L'uso di metodi diretti in generale è utile nella soluzione di sistemi con termini noti multipli:

$$A x = B$$

dove A è una matrice di ordine n , x è una matrice rettangolare incognita di n righe e m colonne e B è la matrice dei termini noti della stessa dimensione di x . A seconda delle proprietà della matrice A , il solutore PARDISO opera nel modo seguente:

- Matrici simmetriche: calcola una permutazione simmetrica P basata sul 'minimum degree' o 'nested dissection' secondo la libreria METIS, quindi effettua una fattorizzazione di Cholesky LL^T di PAP^T per matrici definite positive oppure LDL^T per matrici indefinite.
- Matrici a struttura simmetrica: calcola una permutazione simmetrica P e fattorizzazione LU di PAP^T con pivoting parziale sui supernodi.
- Matrici non simmetriche: calcola una permutazione non simmetrica $P1$ e matrici di scalatura per righe e colonne Dr e Dc . Effettua una permutazione simmetrica P di $[P1 \cdot A + A^T P1^T]$ e una fattorizzazione LU di $[P \cdot P1 \cdot Dr \cdot A \cdot Dc \cdot P^T]$ con pivoting totale sui supernodi.

2. VERIFICA DI CONVERGENZA DEL PROBLEMA STAZIONARIO

INTRODUZIONE

2.1 MODELLI IMPLEMENTATI

2.2 DESCRIZIONE DELL'ESEMPIO NUMERICO

2.3 DESCRIZIONE DELLE GRIGLIE DI CALCOLO UTILIZZATE

2.4 RISULTATI NUMERICI

2.4.1 CONVERGENZA NEL 2-D

2.4.1.1 OSSERVAZIONI

2.4.2 DI CONVERGENZA NEL 3-D

2.4.2.1 OSSERVAZIONI

2.4.3 CONCLUSIONI E SCELTA DEL MODELLO

INTRODUZIONE

Per scegliere il modello da implementare è stato eseguito uno studio di convergenza del metodo dei volumi finiti per il solo problema di flusso in condizioni stazionarie. La convergenza è stata indagata per diversi tipi di griglie di calcolo. Nel caso stazionario l'equazione (1.10) diventa:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega} f d\Omega \quad (2.1)$$

La (2.1) discretizzata come descritto al Capitolo 1 dà:

$$[F] \vec{p} = \vec{f} \quad (2.2)$$

Con $[F]$ matrice di rigidezza dipendente dal tipo di modello di discretizzazione del gradiente di pressione e \vec{f} vettore delle forzanti di flusso esterne.

2.1. MODELLI IMPLEMENTATI

-Modello n°1: il modello di discretizzazione attraverso il rapporto incrementale porta alla generazione della matrice $[V]$ (vedi eq. 1.19) quindi $[F]=[V]$.

-Modello n°2: il modello di discretizzazione del gradiente di pressione con l'ausilio del teorema di Gauss porta ad una matrice di rigidità $[G]$ singolare per cui si è imposto $[F] = ([G] + [V]) / 2$.

2.2. DESCRIZIONE DELL'ESEMPIO TEST

Lo studio della convergenza dei modelli descritti al paragrafo 2.1 è stata svolta su un esempio test del quale è nota la soluzione analitica. Il problema è costituito da un tubo di flusso rettilineo con una differenza di pressione imposta alle estremità (Fig.2.1). La soluzione analitica, ovviamente lineare, è riportata in Fig. 2.2.

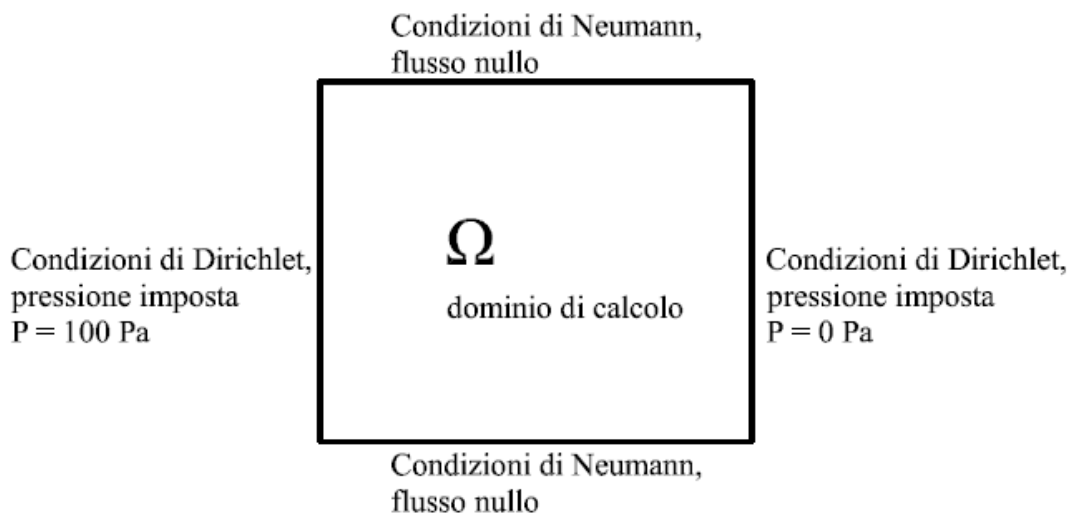


Fig 2.1: Dominio e condizioni al contorno dell'esempio test.

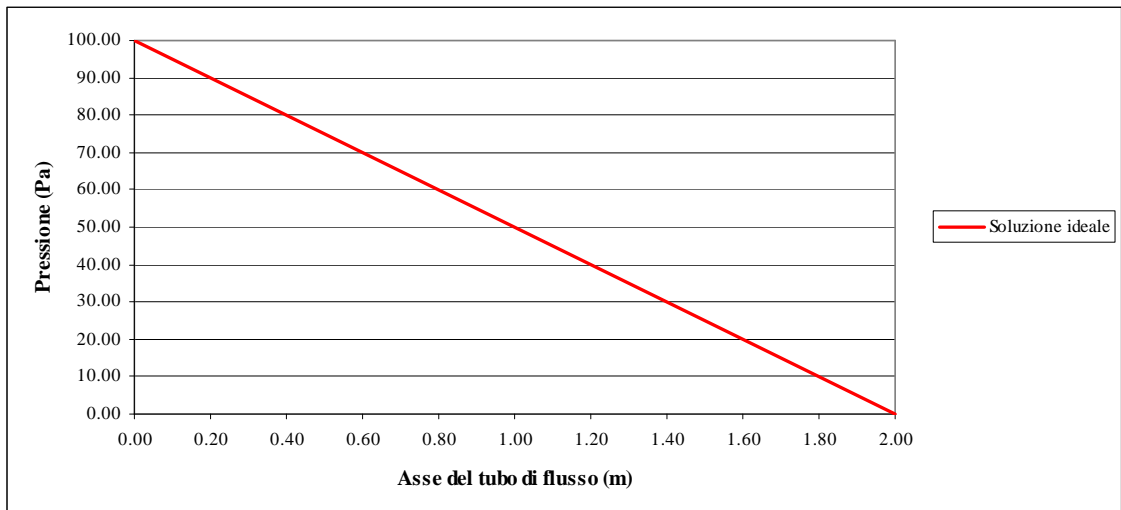


Fig 2.2: Soluzione ideale dell'esempio test.

2.3. DESCRIZIONE DELLE GRIGLIE DI CALCOLO

Il dominio dell'esempio test è stato discretizzato in \mathbf{R}^2 ed \mathbf{R}^3 con diversi tipi di griglie di calcolo. In 2-D sono stati utilizzati 4 tipi di discretizzazione strutturata come mostrato nelle figure 2.2a-d in cui si riporta l'elemento base, di dimensione caratteristica h , che viene ripetuto.

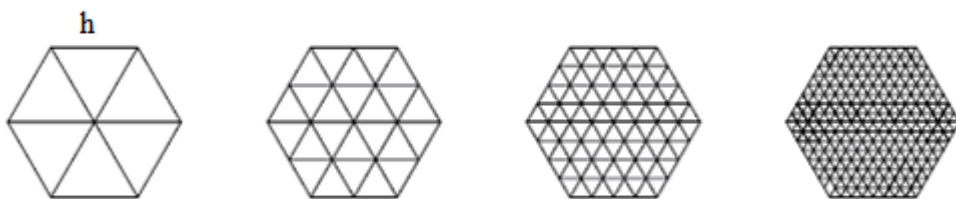


Fig. 2.2a: Griglia 2-D Tipo 1

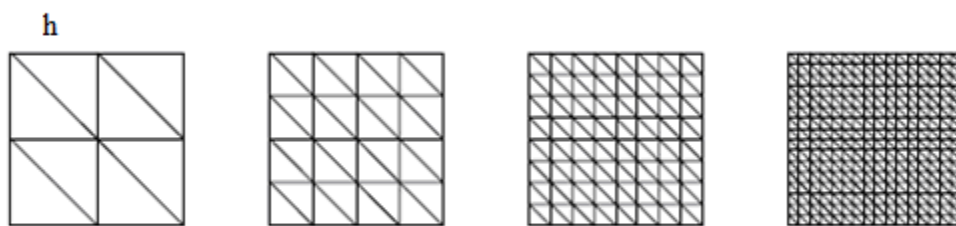


Fig 2.2b: Griglia 2-D Tipo 2.

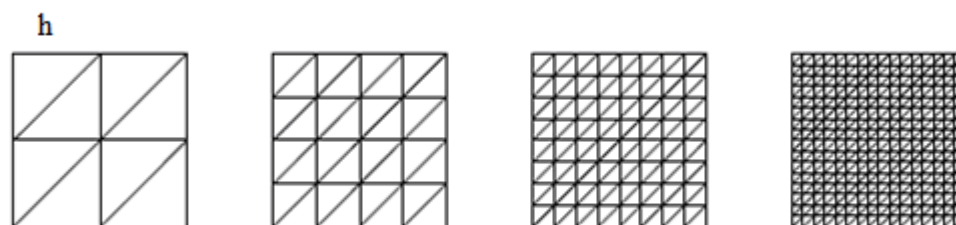


Fig. 2.2c: Griglia 2-D Tipo 3.

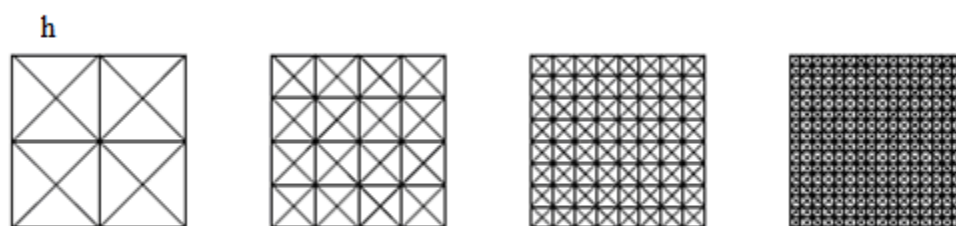


Fig. 2.2d: Griglia 2-D Tipo 4.

Il dominio nel 3-D è stato discretizzato con elementi tetraedrici. La griglia è ottenuta proiettando verticalmente su diversi strati una suddivisione triangolare della superficie in pianta. Ogni prisma a base triangolare, risultante dalla suddivisione in strati, è quindi

suddiviso in tre elementi tetraedrici. Le griglie utilizzate sono quelle rappresentate in figura 2.3a-b, con superficie in pianta triangolare e quadrata, rispettivamente, per griglia di Tipo 1 e Tipo 2.

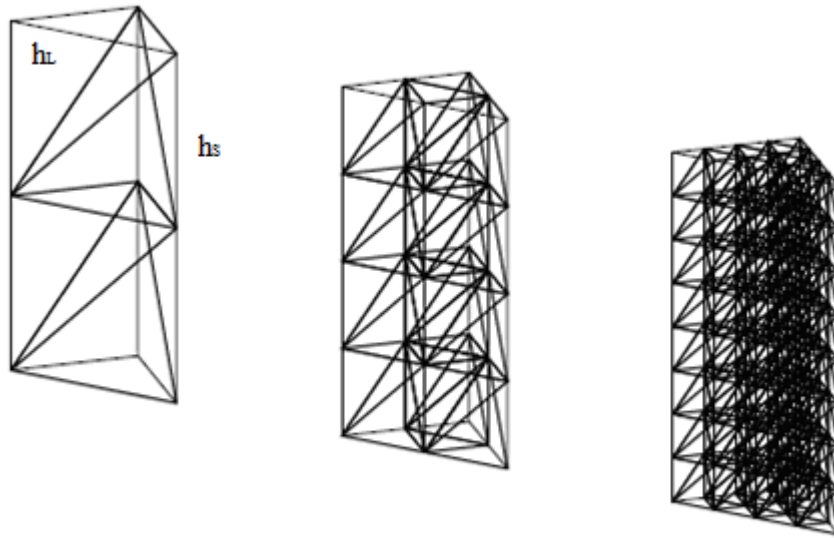


Fig. 2.3a: Griglia 3-D Tipo 1.

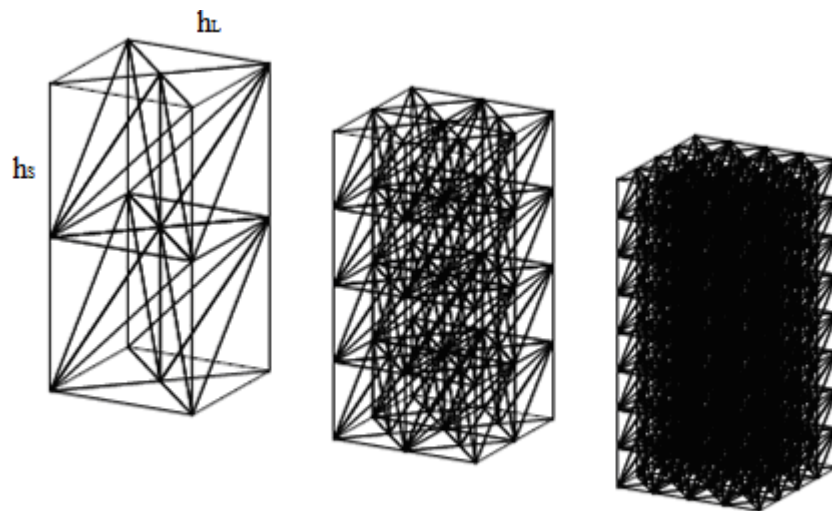


Fig. 2.3b: Griglia 3-D Tipo 2.

2.4. RISULTATI NUMERICI

Per entrambi i modelli e per le diverse griglie di calcolo è stata calcolata la Norma Euclidea dell'errore pesata sul numero degli elementi. I risultati sono stati poi riportati in un diagramma in scala bilogarithmica in funzione della dimensione caratteristica dell'elemento h . Di questi risultati è stata infine calcolata la regressione lineare ai minimi quadrati.

2.4.1. TEST DI CONVERGENZA NEL 2-D

I risultati della verifica di convergenza nel caso di discretizzazione spaziale con griglia di Tipo 1 (Fig.2.2a) sono riportati in Tabella 2.1. Il modello n°1 raggiunge la soluzione esatta per qualsiasi valore della dimensione caratteristica dell'elemento h . Invece col modello n°2 la Norma Euclidea cala di un solo ordine di grandezza con h ridotto di quattro volte, rimanendo su valori dell'ordine di 10^{-2} .

Griglia 2-D Tipo 1			Norma Euclidea	
h (m)	nodi	elementi	modello1	modello2
1.000	7	6	0	0
0.500	19	24	0	0.28063
0.250	61	96	0	0.09277
0.125	217	384	0	0.02507

Tabella 2.1: Valori della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 1.

La convergenza del metodo è evidente in Fig. 2.4.

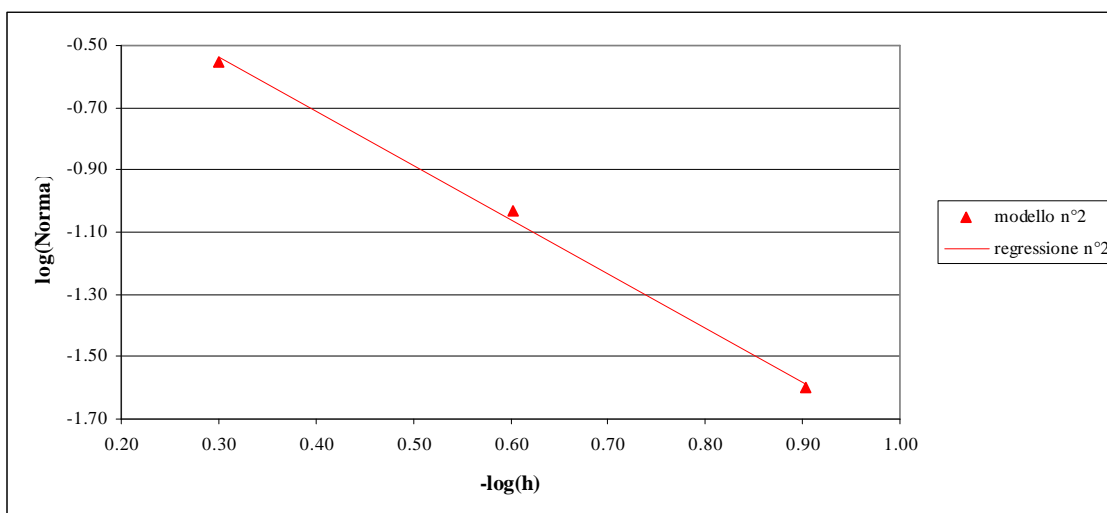


Fig. 2.4: Valore della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 1 in funzione della dimensione caratteristica dell'elemento h.

L'errore risulta del tipo:

$$\left\| \vec{e} \right\|_2 = C \cdot h^P \quad (2.1)$$

con C una costante e $P=1.742$. Anche con la griglia di Tipo 2 (Fig. 2.2b) entrambi i modelli convergono alla soluzione esatta per $h \rightarrow 0$. Come si può notare dai risultati riportati in Tabella 2.2 la convergenza risulta sperimentalmente più lenta rispetto alla griglia di Tipo 1.

Griglia 2-D Tipo 2			Norma Euclidea	
h (m)	nodì	elementi	modello1	modello2
1.000	9	8	0.16788	0.21825
0.500	25	32	0.04766	0.05653
0.250	81	128	0.01865	0.02013
0.125	289	512	0.00874	0.00894

Tabella 2.2: Valori della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 2.

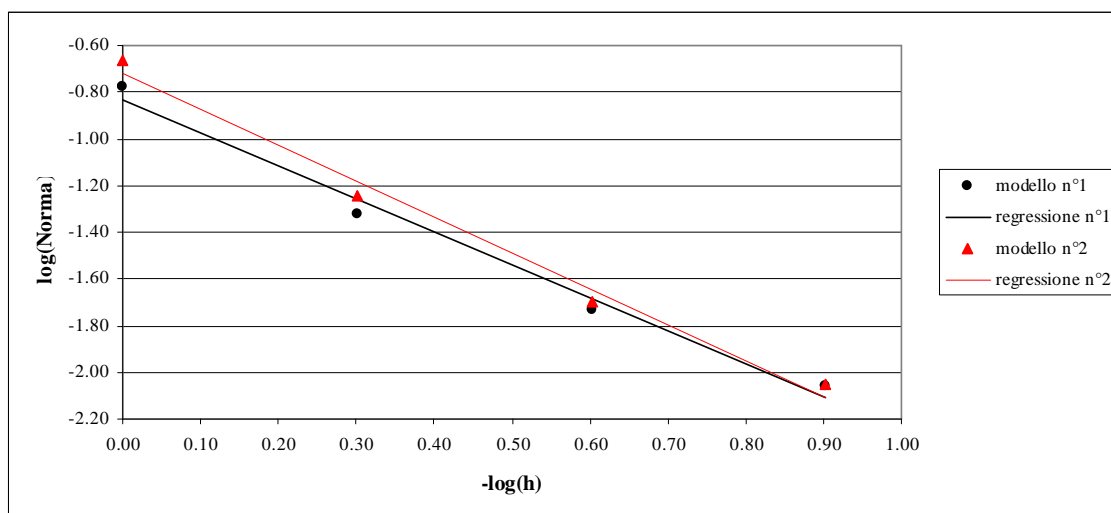


Fig. 2.5: Valore della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 2 in funzione della dimensione caratteristica dell'elemento h .

Il diagramma bilogarithmico di Fig. 2.5 e l'analisi di Tabella 2.3 mostra come la velocità di convergenza sia del tutto simile per i due modelli, e inferiore alla griglia di Tipo 1.

Parametri della retta di regressione	
	P eq. (2.1)
Modello n°1	1.415
Modello n°2	1.532

Tabella 2.3: Parametri delle rette di regressione di Fig. 2.5.

La discretizzazione del dominio con la griglia di Tipo 3 (Fig. 2.2c) dà risultati identici al caso precedente con griglia di Tipo 2, come si può verificare confrontando le Tabelle 2.2 e 2.4.

Griglia 2-D Tipo 3			Norma Euclidea	
h (m)	nodi	elementi	modello1	modello2
1.000	9	8	0.16788	0.21825
0.500	25	32	0.04766	0.05653
0.250	81	128	0.01865	0.02013
0.125	289	512	0.00874	0.00894

Tabella 2.4: Valori della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 3.

L'ultimo tipo di discretizzazione analizzato per un dominio 2-D è il Tipo 4 (Fig.2.2d). In questo caso la risposta dei due modelli è del tutto simile a quanto visto in precedenza con la discretizzazione di Tipo 1. Come riportato in Tabella 2.5 il modello n°1 raggiunge la soluzione esatta per qualsiasi valore di h.

Griglia 2-D Tipo 4			Norma Euclidea	
h (m)	nodi	elementi	modello1	modello2
1.000	13	16	0	0.01856
0.500	41	64	0	0.00910
0.250	145	256	0	0.00271
0.125	545	1024	0	0.00073

Tabella 2.5: Valori della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 4.

Il modello n°2, invece, converge come evidenziato in Fig. 2.6 con $P=1.575$.

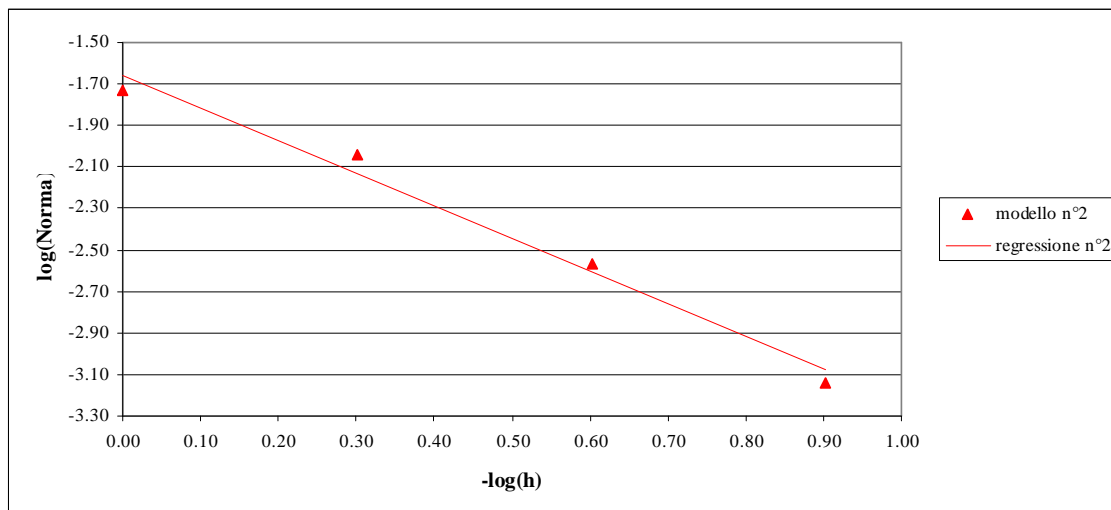


Fig. 2.6: Valore della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 4 in funzione della dimensione caratteristica dell'elemento h .

Dal confronto tra i valori sperimentali di P nei diversi casi, si nota che la pendenza della retta di convergenza del modello n°2 assume valori molto simili tra loro con un comportamento super-lineare.

2.4.1.1. OSSERVAZIONI

I risultati ottenuti nella precedente analisi permettono di fare le seguenti osservazioni:

- Per tutti i tipi di discretizzazione spaziale, al raffinarsi della griglia, i due modelli convergono alla soluzione esatta.
- Entrambi i modelli mostrano una forte sensibilità al tipo di griglia. Il modello n°1 ottiene le risposte migliori negli esempi con le griglie di tipo 1 e 4, in cui la soluzione calcolata converge subito a quella esatta. Il modello n°2 mostra invece una convergenza più lenta alla soluzione esatta con tutti i tipi di griglia, ma sembra adattarsi meglio al reticolo strutturato di tipo 4, in cui il valore della Norma Euclidea si attesta su valori dell'ordine di 10^{-4} .

- I risultati numerici evidenziano che le discretizzazioni con le griglie di Tipo 2 e 3 danno lo stesso risultato. Parallelamente anche le simulazioni con maglie di Tipo 1 e 4 producono risultati molto simili tra loro.
- La convergenza di entrambi i modelli è di tipo super-lineare.

2.4.2. TEST DI CONVERGENZA NEL 3-D

I risultati numerici nel caso di dominio tridimensionale e griglia di Tipo 1 (Fig. 2.3a) sono riportati in Tabella 2.6. Per entrambi i modelli la convergenza è piuttosto lenta. La riduzione di un ordine di grandezza della dimensione caratteristica di h porta la Norma a ridursi circa della metà, attestandosi comunque su valori piuttosto elevati.

Griglia 3-D Tipo 1			Norma Euclidea	
$h=h_L=h_S$ (m)	nodi	elementi	modello1	modello2
1.000	9	6	6.301	9.402
0.500	30	48	4.988	5.636
0.250	135	384	4.202	4.289

Tabella 2.6: Valori della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 1.

I risultati della Tabella 2.6 sono riportati nel diagramma di Fig. 2.7.

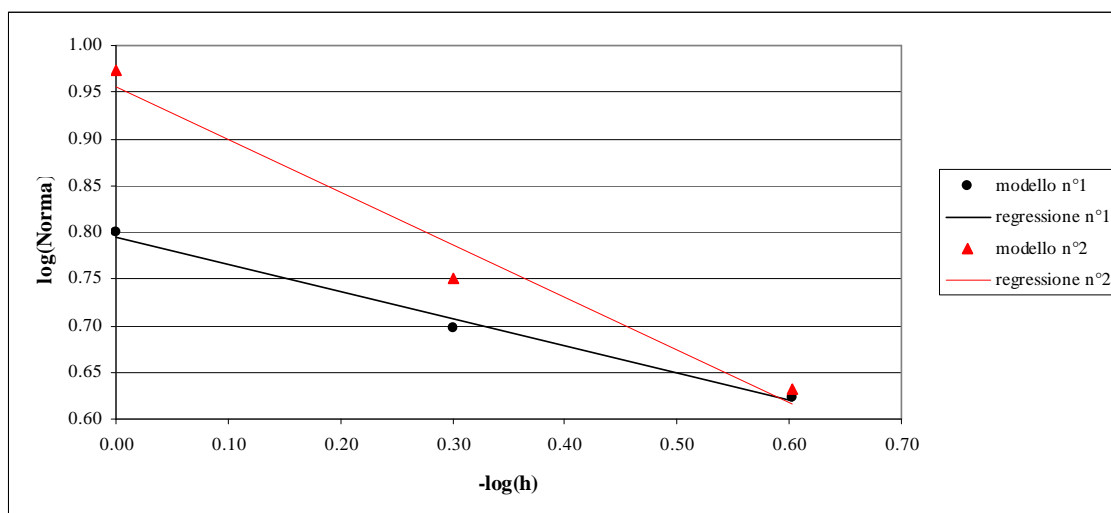


Fig. 2.7: Valore della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 1 in funzione della dimensione caratteristica dell'elemento h .

La ricerca del valore di P dell'equazione (2.1) dà i risultati di Tabella 2.7 con una convergenza ora sub-lineare.

Parametri della retta di regressione	
	P eq. (2.1)
Modello n°1	0.292
Modello n°2	0.566

Tabella 2.7: Parametri delle rette di regressione di Fig. 2.7.

I risultati ottenuti con la griglia di Tipo 2 sono riportati di seguito in Tabella 2.8. Per questo tipo di discretizzazione valgono le stesse considerazioni fatte nel caso precedente.

Griglia 3-D Tipo 2			Norma Euclidea	
$h_L=h_s$ (m)	nodì	elementi	modello1	modello2
1.000	15	24	10.25	14.03
0.500	65	192	6.237	7.398
0.250	369	1536	4.992	5.33

Tabella 2.8: Valori della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 2.

Anche il grafico bilogaritmico di Fig. 2.8 e i risultati sperimentali della Tabella 2.9 confermano di fatto le precedenti osservazioni.

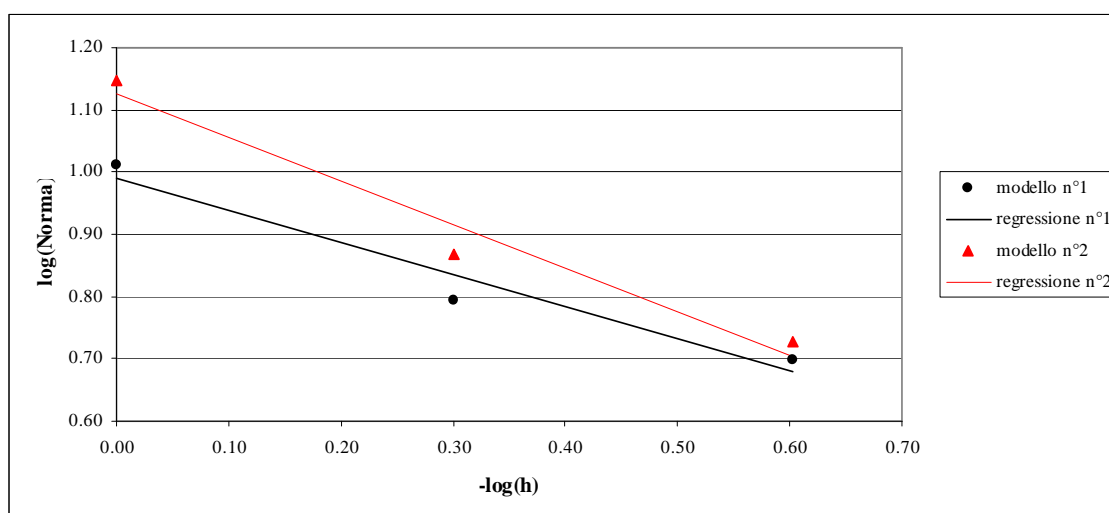


Fig. 2.8: Valore della Norma Euclidea, pesata sul numero di elementi, nel caso di griglia di Tipo 2 in funzione della dimensione caratteristica dell'elemento h .

Parametri della retta di regressione	
	P eq. (2.1)
Modello n°1	0.519
Modello n°2	0.698

Tabella 2.9: Parametri delle rette di regressione di Fig. 2.8.

2.4.2.1. OSSERVAZIONI

I risultati ottenuti nell'analisi 3-D conducono alle seguenti osservazioni:

- Anche nel dominio 3-D, per tutti i tipi di discretizzazione spaziale, al raffinarsi della griglia i due modelli convergono alla soluzione esatta.
- La sensibilità alla griglia è ancora evidente. Il reticolo tetraedrico, generato per strati proiettando una suddivisione triangolare della base, non si adatta a nessuno dei due modelli e la convergenza alla soluzione è molto lenta, con valori dell'errore relativamente elevati.
- La convergenza di entrambi i modelli risulta sub-lineare

2.4.3. SCELTA DEL MODELLO PER LA STIMA DEL GRADIENTE DI PRESSIONE

Per quanto visto ai punti precedenti si conclude che l'affidabilità dei modelli nella stima del gradiente di pressione è strettamente legata alla geometria del reticolo di calcolo con cui si discretizza il dominio fisico. Nel 2-D i risultati sono soddisfacenti con griglie strutturate come la griglia tipo 4 e anche per griglie non strutturate, ma con una triangolazione che tende a quella di tipo 1 (triangolazione di Delaunay). Nel 3-D invece è necessario investigare ancora l'affidabilità dei modelli su altri tipi di reticolo.

Il modello n°2 coinvolge nella stima locale del gradiente il valore di pressione di molti più elementi rispetto al modello n°1 (vedi Cap. 1), ma nonostante questo mostra una convergenza più lenta alla soluzione esatta, a fronte anche di un maggior onere computazionale. Quindi si è scelto di implementare solo il modello n° 1 per la soluzione del problema poroelastico, la matrice (1.24) diventa:

$$[A] = \begin{bmatrix} \vartheta[K] & -\vartheta[Q] \\ [Q]^T & \Delta t \vartheta[V] + [P] \end{bmatrix}$$

3. INFLUENZA DELLA GRIGLIA DI CALCOLO SUL TERMINE TRANSITORIO LEGATO ALLA COMPRESSIBILITÀ DEL FLUIDO

INTRODUZIONE

3.1 DESCRIZIONE DELL'ESEMPIO NUMERICO

3.2 RISULTATI NUMERICI IN 2-D E 3-D

3.2.1 OSSERVAZIONI

INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno svolte delle simulazioni numeriche per indagare l'influenza della griglia di calcolo sul termine transitorio legato alla compressibilità del fluido. In particolare si verificherà che una discretizzazione spaziale non adeguata del dominio porterà il modello a convergere ad una soluzione di pressione che si può scostare anche significativamente da quella esatta nella fase di transitorio.

Riprendendo il sistema di equazioni che governa il problema (1.11-1.12):

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(\vec{u}) = \alpha \nabla p + \vec{b}$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} [\phi \beta p + \alpha \operatorname{div}(\vec{u})] = f$$

per indagare l'influenza del termine transitorio $(\phi \beta p)$ si considera che lo scheletro solido rimanga rigido, cioè $\vec{u} = 0$. Il sistema (1.11-12) si riduce allora alla sola equazione di flusso in transitorio:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t} [\phi \beta p] = f$$

3.1. DESCRIZIONE DELL'ESEMPIO NUMERICO

Lo studio dell'influenza della griglia di calcolo sul termine legato alla compressibilità del fluido è stato svolto simulando una colonna di lunghezza $L=15$ m e sezione unitaria di materiale omogeneo con conducibilità idraulica di 10^{-7} m/s a cui è stata imposta alla base superiore una pressione di -1500 Pa (Fig. 3.1). Gli spostamenti sono stati imposti

nulli ed il drenaggio è possibile solo attraverso la base con pressione imposta. La pressione iniziale nel dominio è imposta nulla.

Condizioni al contorno per il flusso

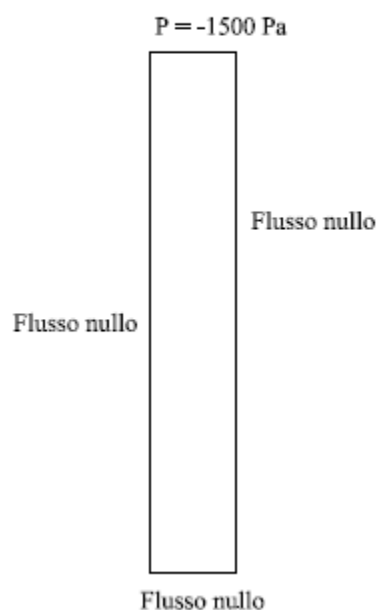


Fig. 3.1: Condizioni al contorno per l'esempio numerico con spostamenti nulli.

La colonna è stata discretizzata sia in 2-D che in 3-D per diversi tipi di griglia, come già anticipato nell'analisi di convergenza al Capitolo 2. La soluzione di pressione calcolata viene quindi graficata assieme alla soluzione ideale agli istanti specificati in Tabella 3.1.

	Istante (s)
T1	50
T2	500
T3	1000
T4	2000
T5	3000

Tabella 3.1: Istanti della simulazione graficati.

Definiti con \vec{X} e \vec{e} il vettore della soluzione esatta ed il vettore errore rispettivamente, per tutti gli istanti di riferimento è stato quantificato lo scostamento della soluzione di calcolo da quella esatta calcolando l'errore massimo assoluto $\|\vec{e}\|_{\infty}$ e l'errore relativo $\|\vec{e}\|_2 / \|\vec{X}\|_2$ (3.1).

3.2. RISULTATI NUMERICI IN 2-D E 3-D

La simulazione con griglia di tipo Delaunay (Fig. 2.2a) riportata in Fig. 3.2, i cui parametri sono riassunti in Tabella 3.2, mostra che la soluzione calcolata tende ad anticipare quella ideale. Nei primi istanti della simulazione il modello descrive in maniera corretta la propagazione della pressione lungo la colonna, l'errore assoluto a T1 è la metà di quello a T3 e T4, come riportato in Tabella 3.3. L'errore relativo è invece dello stesso ordine di grandezza. Questo perché a T1 la pressione è nulla lungo gran parte della colonna e il valore di $\|\vec{X}\|_2$, a denominatore nell'equazione (3.1), ha una influenza minore sulla riduzione dell'errore rispetto agli istanti successivi. Trascurando questa prima parte del transitorio, lo scostamento massimo dalla soluzione ideale è sempre localizzato alla base della colonna.

Griglia 2-D tipo Delaunay	
nodi	545
elementi	960
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
θ	1

Tabella 3.2: Parametri della simulazione con griglia di Tipo Delaunay.

Lo scarto massimo, circa 100 Pa, si mantiene costante durante la fase di transitorio. L'errore relativo raggiunge valori massimi dell'ordine del 9%. Lo scarto tra la soluzione calcolata e quella esatta si riduce solo quando il problema si avvicina allo stazionario, infatti a T5 l'errore relativo è dimezzato rispetto a T3 e l'errore assoluto è diminuito di quasi un terzo

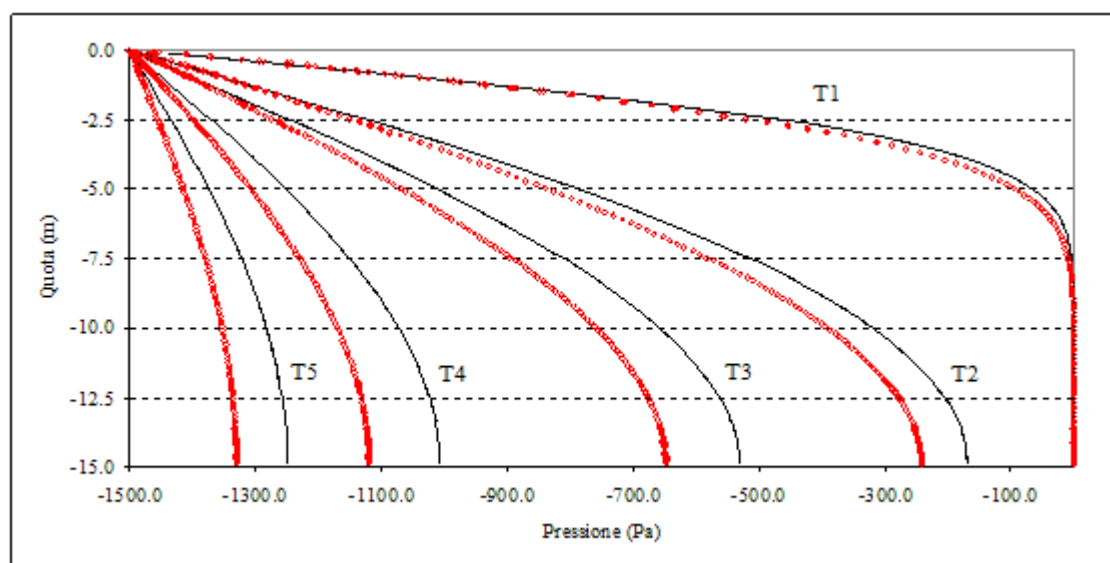


Fig. 3.2: Soluzione di pressione con griglia di Tipo Delaunay.

	T1	T2	T3	T4	T5
Errore assoluto (Pa)	54.1	73.0	116.0	111.6	80.1
Errore relativo (%)	6.0	8.0	8.8	6.6	4.2

Tabella 3.3: Errori con griglia di Tipo Delaunay.

Le simulazioni con griglia di Tipo 2 e 3 (Fig. 2.2b-c) forniscono risultati identici e pertanto verranno analizzate assieme. I parametri adottati sono riportati in Tabella 3.4.

Griglia 2-D Tipo 2 e 3	
nodì	305
elementi	480
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
ϑ	1

Tabella 3.4 Parametri della simulazione con griglia di Tipo 2 e 3.

Come notato in precedenza, il modello nei primi istanti della simulazione descrive in maniera corretta la propagazione della pressione. Contrariamente a quanto visto con la griglia di Tipo Delaunay, però, la soluzione di calcolo tende a presentare un ritardo rispetto a quella ideale, come mostrato in Fig. 3.3.

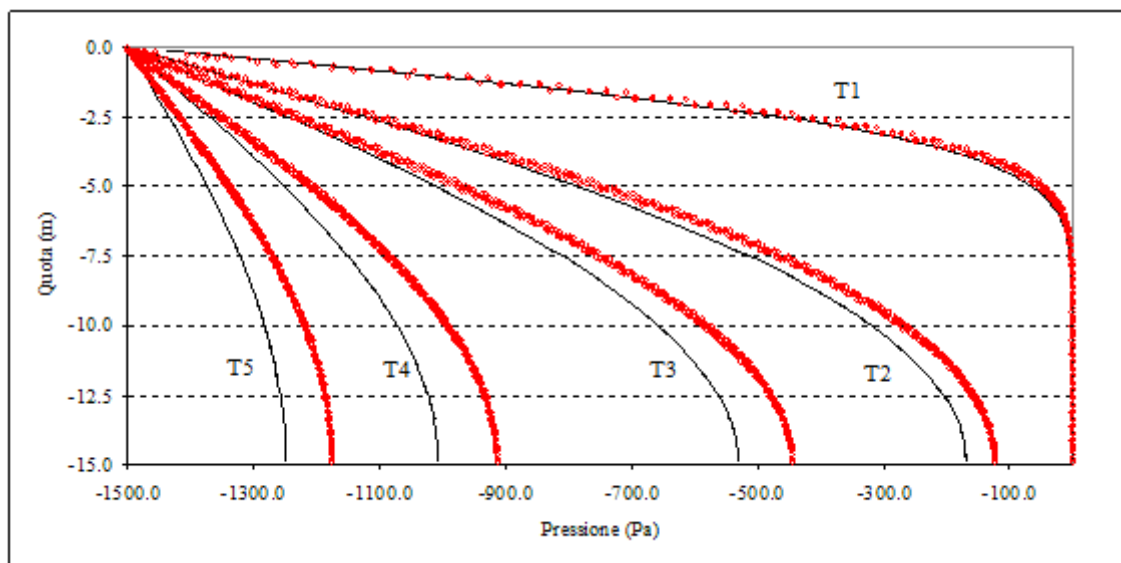


Fig. 3.3: Soluzione di pressione con griglia di Tipo 2 e 3.

Rispetto alla soluzione con griglia di Delaunay lo scostamento massimo è leggermente inferiore, l'errore è di circa il 7% anziché il 9%. Gli errori assoluti e relativi nella fase di transitorio sono comunque dello stesso ordine di grandezza, come si può notare confrontando i valori nelle Tabelle 3.3 e 3.5.

	T1	T2	T3	T4	T5
Errore assoluto (Pa)	79.8	59.0	88.0	94.8	75.5
Errore relativo (%)	4.9	5.6	6.6	5.5	3.9

Tabella 3.5: Errori con griglia di Tipo 2 e 3.

Con la griglia di Tipo 4 (Fig. 2.2d) il modello converge alla soluzione esatta durante tutta la fase di transitorio, come si nota in Fig. 3.4. I parametri della simulazione sono riassunti in Tabella 3.6.

Griglia 2-D Tipo 4	
nodi	545
elementi	960
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
ϑ	1

Tabella 3.6 Parametri della simulazione con griglia di Tipo 4.

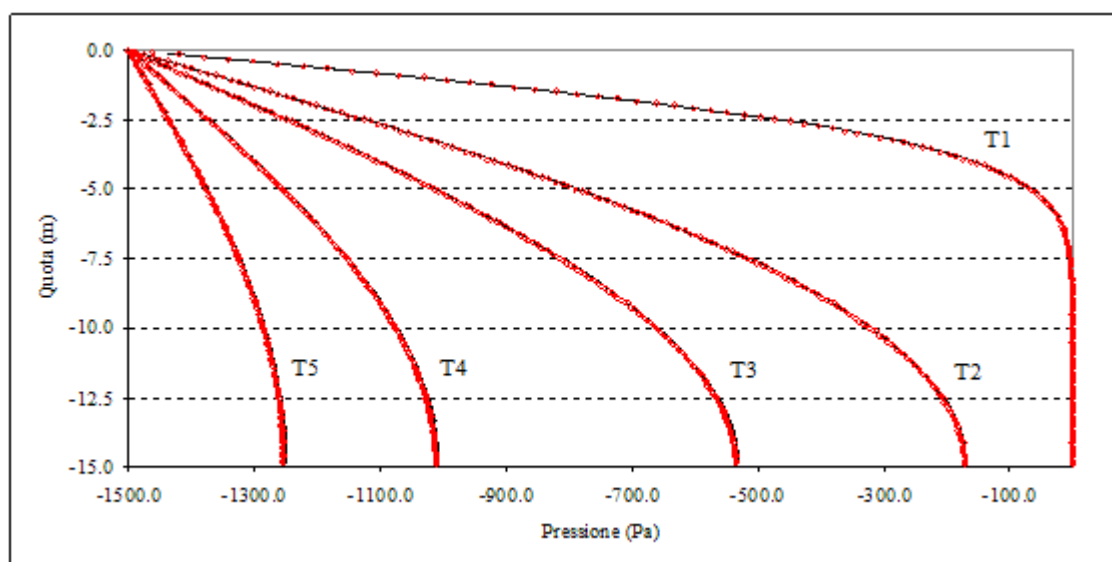


Fig. 3.4: Soluzione di pressione con griglia di Tipo 4.

La griglia nel 3-D è ottenuta proiettando verticalmente una suddivisione triangolare della pianta e scomponendo poi i prismi in tetraedri, come descritto precedentemente nel paragrafo 2.3. La pianta è stata assunta quadrata di lato unitario ed è suddivisa in 8 triangoli simili. I parametri della simulazione sono riportati in Tabella 3.7.

La soluzione di calcolo mostra un ritardo rispetto a quella ideale, come mostrato in Fig. 3.5, con un comportamento simile a quanto visto in 2-D per le griglie di Tipo 2 e 3.

Griglia 3-D	
nodi	279
elementi	720
$h=h_L=h_S$ (m)	0.5
Δt (s)	0.1
ϑ	1

Tabella 3.7 Parametri della simulazione in 3-D.

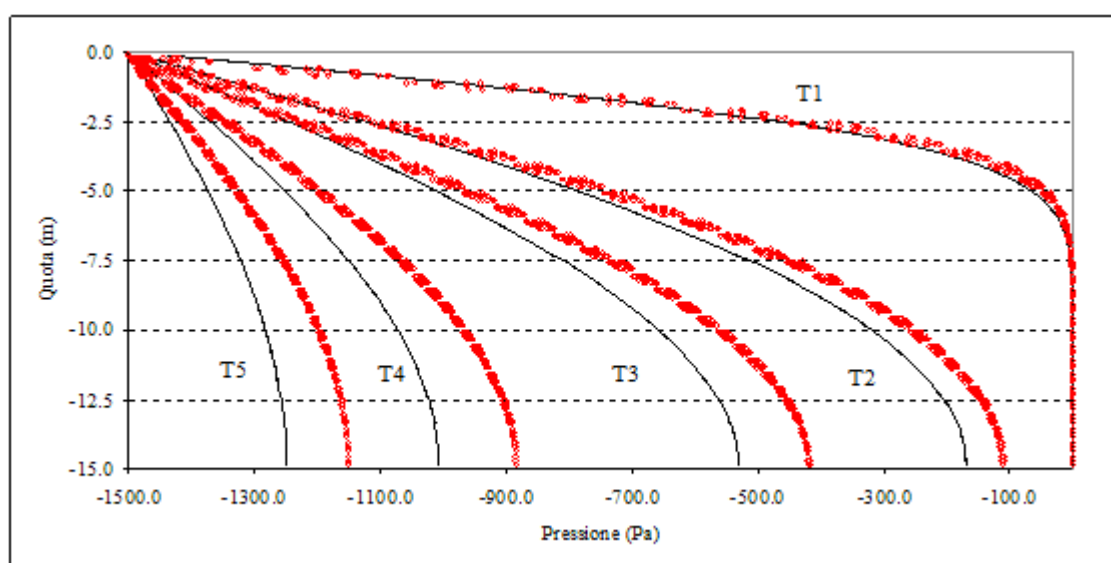


Fig. 3.5: Soluzione di pressione in 3-D.

Lo sostamento massimo è dell'ordine del 8%. Gli errori hanno lo stesso ordine di grandezza di quelli visti in 2-D con le griglie di Tipo Delaunay e Tipo 2, come si può verificare confrontando le Tabelle 3.3, 3.5 e 3.8.

	T1	T2	T3	T4	T5
Errore assoluto (Pa)	116.6	75.7	113.7	124.4	100.4
Errore relativo (%)	6.6	6.9	8.3	7.1	5.2

Tabella 3.8: Errori simulazione in 3-D.

3.2.1. OSSERVAZIONI

L'analisi del modello di flusso in transitorio ha condotto alle seguenti osservazioni:

- Nei primi istanti della simulazione, la soluzione calcolata su tutte le griglie, in 2-D e in 3-D, descrive in maniera corretta la propagazione della pressione lungo la colonna. Esclusa la griglia di Tipo 4, tutte le altre mostrano scostamenti della soluzione durante la fase di transitorio. La soluzione tende comunque a convergere a quella esatta in stazionario.
- La griglia di Tipo Delaunay, sebbene abbia dato buoni risultati nei test di convergenza nello stazionario, nel transitorio porta il modello a convergere ad una soluzione che tende ad anticipare quella ideale. Gli errori massimi sono dell'ordine del 9%.
- Con le griglie di Tipo 2 e 3 il modello dà risultati identici: la soluzione è ritardata nella fase di transitorio, con errori massimi dell'ordine del 7%.
- La griglia di Tipo 4 risulta essere la discretizzazione spaziale che meglio si adatta al modello anche nel transitorio. La soluzione calcolata descrive in maniera corretta la propagazione della pressione fino alla condizione di stazionarietà.
- La soluzione in 3-D mostra un andamento simile a quanto visto in 2-D per le griglie di Tipo 2 e 3. La soluzione calcolata è in ritardo rispetto a quella ideale, con errori massimi sul valore di pressione dell'ordine del 8%.

4. RISULTATI NUMERICI

INTRODUZIONE

4.1 CONSOLIDAZIONE DI TERZAGHI

4.1.1 DISCRETIZZAZIONE 2D

4.1.1.1 OSSERVAZIONI

4.1.2 DISCRETIZZAZIONE 3D

4.1.2.1 OSSERVAZIONI

4.2 PROBLEMA ETEROGENEO

4.2.1 DISCRETIZZAZIONE 2D E 3D

4.2.1.1 OSSERVAZIONI

INTRODUZIONE

In questo capitolo viene indagata l'accuratezza del modello accoppiato per lo studio della consolidazione tridimensionale in cui si utilizza l'approccio combinato tra elementi finiti e volumi finiti precedentemente descritto. L'analisi viene prima condotta su un esempio di cui è disponibile la soluzione analitica, e successivamente su un problema eterogeneo per valutare i vantaggi legati allo smorzamento delle oscillazione numeriche della pressione all'interfaccia tra materiali caratterizzati da una diversa conducibilità idraulica.

4.1. CONSOLIDAZIONE DI TERZAGHI

Il problema di Terzaghi [4] consiste in una colonna di terreno omogeneo saturo di altezza L soggetta ad un carico costante P_L sulla base superiore (Fig. 4.1).

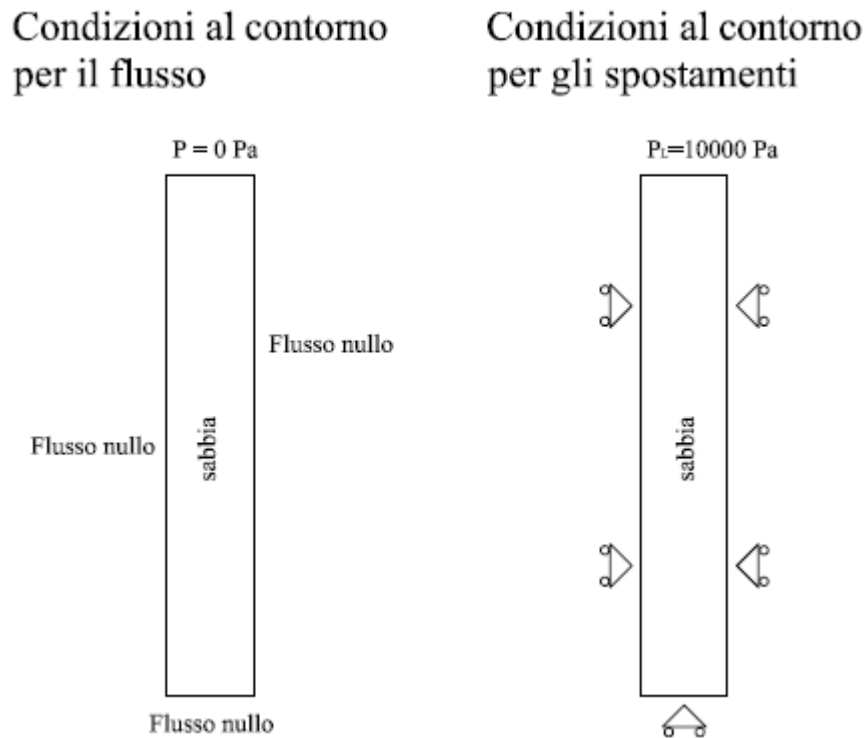


Fig. 4.1: Condizioni al contorno per l'esempio numerico di Terzaghi.

Il drenaggio e lo spostamento sono liberi attraverso la superficie caricata mentre lungo il resto del contorno sono impediti. Il carico è applicato istantaneamente al tempo $t = 0$ e produce una sovrappressione $p_0(z)$ e un abbassamento $u_0(z)$. La soluzione analitica dà [3,8]:

$$p(z, t) = \frac{4}{\pi} p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \exp\left[-\frac{(2m+1)^2 \pi^2 c t}{4L^2}\right] \sin\left[\frac{(2m+L)\pi}{2L}\right]$$

$$u(z, t) = -c_M p_0 \left\{ (L - z) - \frac{8L}{\pi^2} p_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \exp\left[-\frac{(2m+1)^2 \pi^2 c t}{4L^2}\right] \cos\left[\frac{(2m+L)\pi}{2L}\right] \right\} + u_0$$

dove:

$$p_0(z) = \frac{\alpha M}{K_u + 4\mu/3} P_L$$

$$u_0(z) = -\frac{\alpha M}{K_u + 4\mu/3} P_L (L - z)$$

Con $M = [\phi\beta + (\alpha - \phi)c_{br}]^{-1}$ il modulo di Biot, c_{br} la compressibilità dei grani (posta nulla), $K_u = \lambda + 2\mu/3 + \alpha^2 M$ il modulo elastico non drenato, $c_M = (\lambda + 2\mu)^{-1}$ la compressibilità verticale e $c = k / [\rho g (M^{-1} + \alpha^2 c_M)]$ il coefficiente di consolidazione. Negli esempi numerici è stata simulata una colonna di lunghezza $L=15\text{m}$ e sezione unitaria composta da sabbia omogenea, le proprietà idrauliche e meccaniche sono riassunte nella Tabella 4.1. Il carico distribuito è di $P_L = 10000 \text{ Pa}$.

Conducibilità idraulica	$k \text{ (m/s)}$	1.00E-05
Porosità	ϕ	0.375
Compressibilità del fluido	$\beta \text{ (1/MPa)}$	4.40E-04
Costante di Lamé	$\lambda \text{ (MPa)}$	40
Costante di lamé	$\mu \text{ (MPa)}$	40
Coeff. di Biot	α	1.0

Tabella 4.1: proprietà idrauliche e meccaniche per l'esempio numerico di Terzaghi.

La colonna è stata discretizzata sia in 2D che in 3D per diversi tipi di griglia come già anticipato nell'analisi di convergenza al Capitolo 2 e nelle simulazioni del problema di flusso in transitorio al Capitolo 3. Per ogni tipo di griglia è stata calcolata una soluzione per diversi gradi di raffinamento del reticolo e per diversi valori del passo di integrazione temporale Δt . Inoltre è stata indagata l'influenza dello schema di integrazione temporale calcolando la soluzione sia con uno schema di Eulero implicito $\vartheta = 1$ che con lo schema di Crank-Nicolson $\vartheta = 0.5$.

La soluzioni di pressione e spostamento calcolate vengono quindi graficate assieme alla soluzione esatta agli istanti specificati in Tabella 4.2.

	Istante (s)
T1	60
T2	600
T3	1800
T4	3600

Tabella 4.2: Istanti della simulazione graficati.

Per tutti gli istanti di riferimento è stato quantificato lo scostamento della soluzione di calcolo da quella esatta calcolando l'errore massimo assoluto $\|\vec{e}\|_{\infty}$ e l'errore relativo

$\|\vec{e}\|_2 / \|\vec{X}\|_2$ (4.1), come fatto al Capitolo 3 per il problema di solo flusso in transitorio.

4.1.1. DISCRETIZZAZIONE 2D

Le simulazioni A, B e C sono effettuate discretizzando il dominio con una griglia di Tipo Delaunay (fig.2.2a), i cui parametri sono riportati nelle tabelle 4.3, 4.6 e 4.9 rispettivamente. Le simulazioni A e B hanno lo stesso grado di raffinamento della griglia di calcolo, che è minore rispetto a C, mentre hanno un passo di integrazione temporale maggiore di C. La simulazione A è condotta con uno schema di integrazione temporale di Eulero implicito, come la C, mentre per la B è stato adottato lo schema di Crank-Nicolson.

Simulazione A	
Griglia 2-D tipo Delaunay	
nodì	153
elementi	240
h (m)	0.5
Δt (s)	0.1
ϑ	1

Tabella 4.3: Parametri della simulazione A.

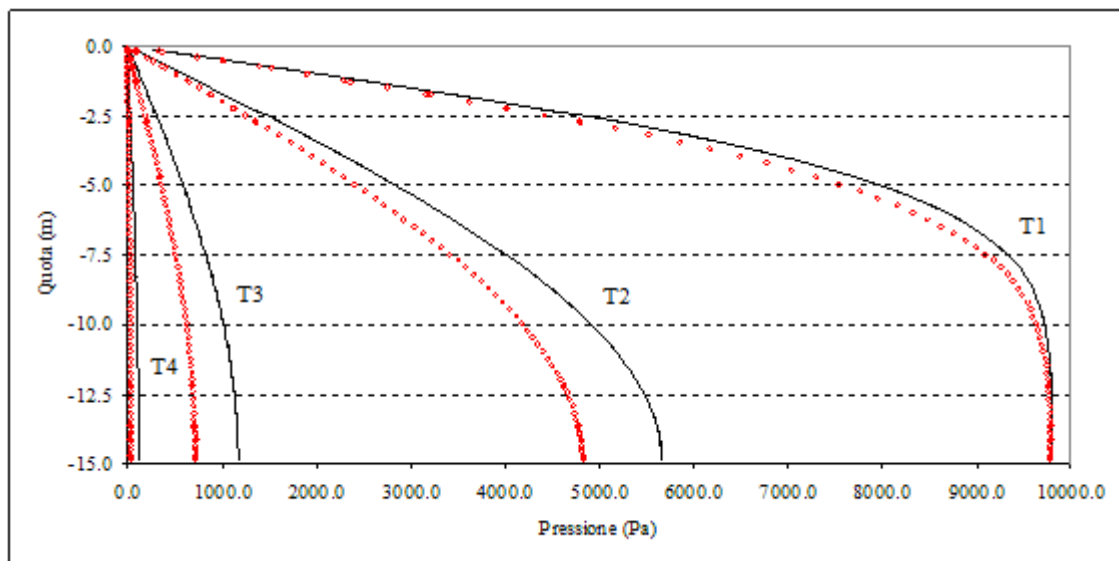


Fig. 4.2: Soluzione di pressione della simulazione A.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	456.1	832.0	444.0	67.4
Errore relativo (%)	3.1	14.8	38.0	61.5

Tabella 4.4: Errori sulle pressioni della simulazione A.

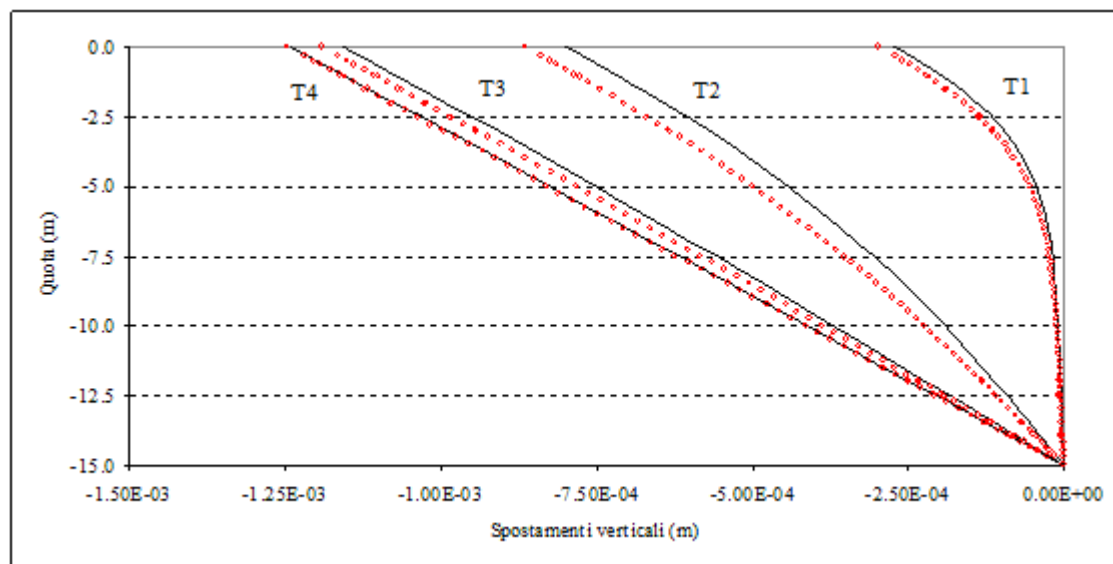


Fig. 4.3: Soluzione di spostamento della simulazione A.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.27E-4	0.68E-4	0.36E-4	0.05E-4
Errore relativo (%)	14.0	11.5	3.8	0.5

Tabella 4.5: Errori sugli spostamenti della simulazione A.

Simulazione B	
Griglia 2-D tipo Delaunay	
nodì	153
elementi	240
h (m)	0.5
Δt (s)	0.1
θ	0.5

Tabella 4.6: Parametri della simulazione B.

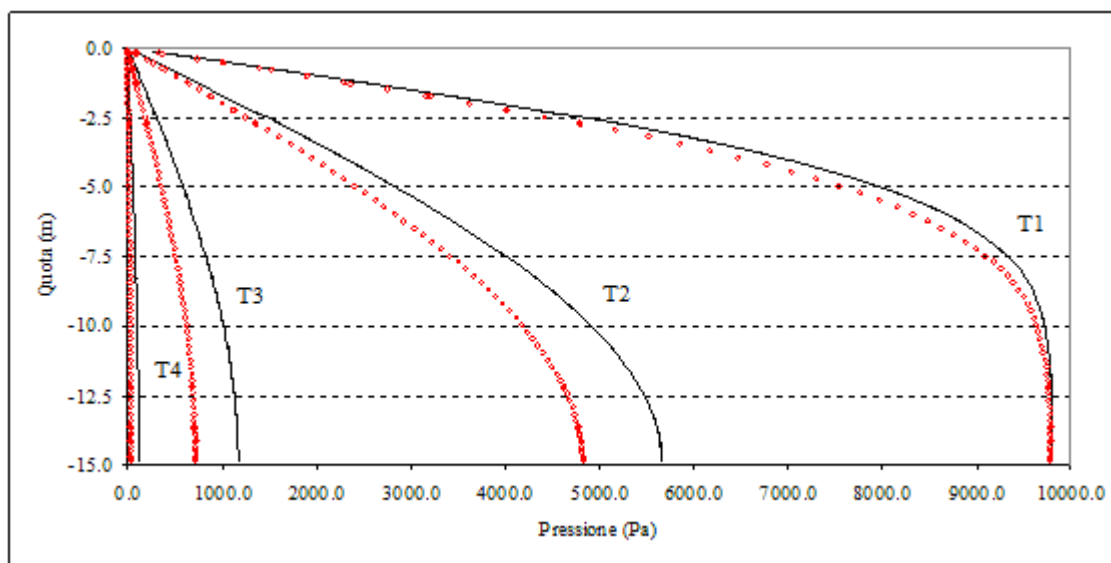


Fig. 4.4: Soluzione di pressione della simulazione B.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	456.3	832.0	444.1	67.4
Errore relativo (%)	3.1	14.8	38.0	61.5

Tabella 4.7: Errori sulle pressioni della simulazione B.

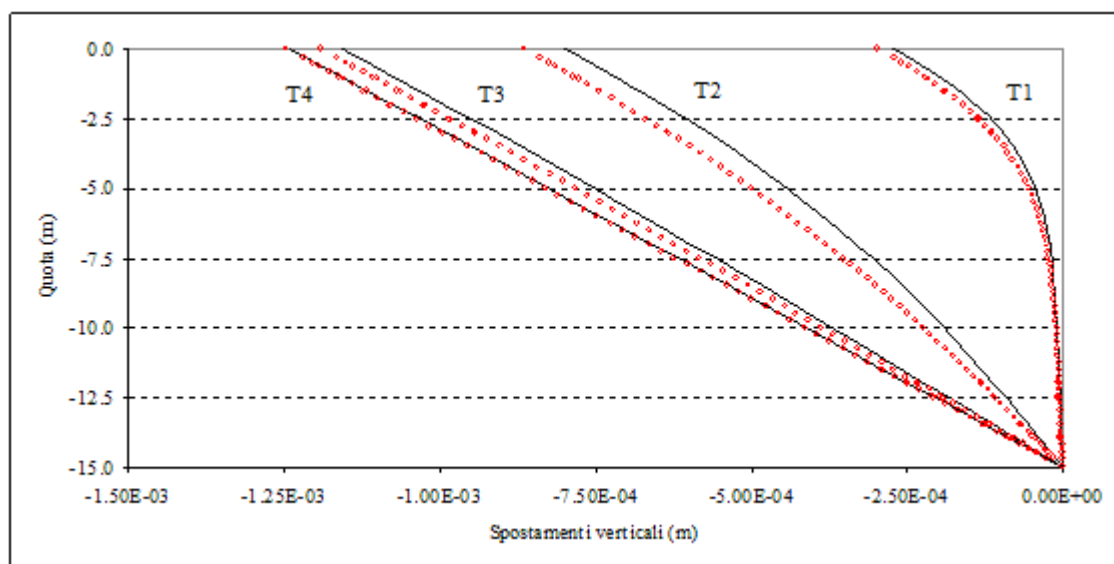


Fig. 4.5: Soluzione di spostamento della simulazione B.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.27E-4	0.68E-4	0.36E-4	0.05E-4
Errore relativo (%)	14.0	11.5	3.8	0.5

Tabella 4.8: Errori sugli spostamenti della simulazione B.

Da un primo confronto tra i risultati delle simulazioni A e B riportati in Fig. 4.2-5, e le stime degli errori della soluzione di calcolo durante la fase di stazionario in Tabelle 4.4-5 e 4.7-8, si conclude che un diverso schema di integrazione temporale non incide in maniera significativa sulla soluzione. Tale considerazione vale per tutti i tipi di discretizzazione analizzati in 2-D, pertanto verranno presentati di seguito solo i risultati di simulazioni con schema di integrazione temporale implicito.

Simulazione C	
Griglia 2-D tipo Delaunay	
nodi	545
elementi	960
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
θ	1

Tabella 4.9: Parametri della simulazione C.

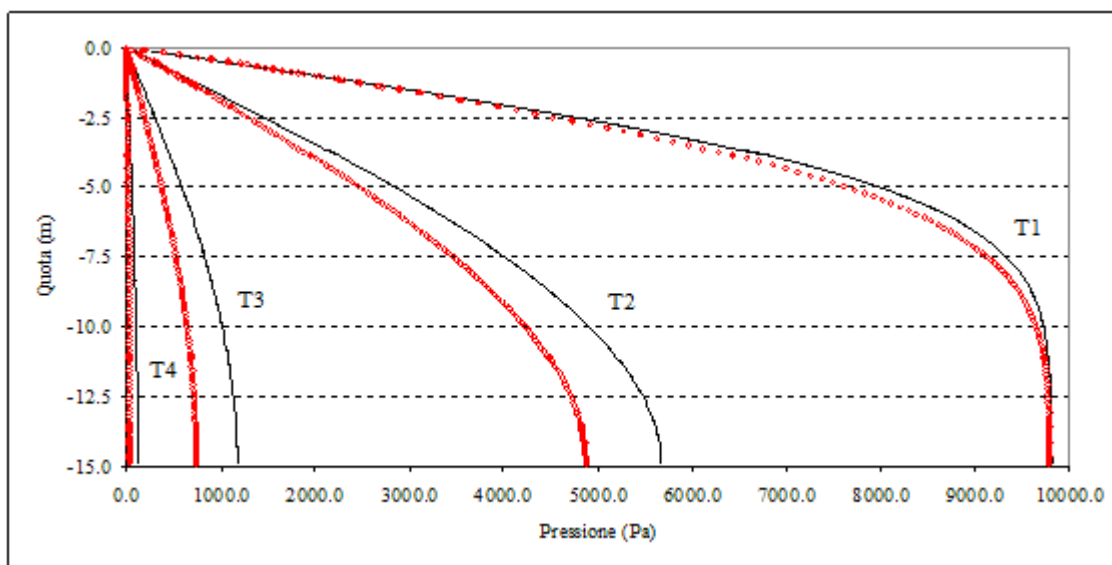


Fig. 4.6: Soluzione di pressione della simulazione C.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	373.2	786.1	423.0	64.9
Errore relativo (%)	2.5	13.8	36.0	59.2

Tabella 4.10: Errori di pressione della simulazione C.

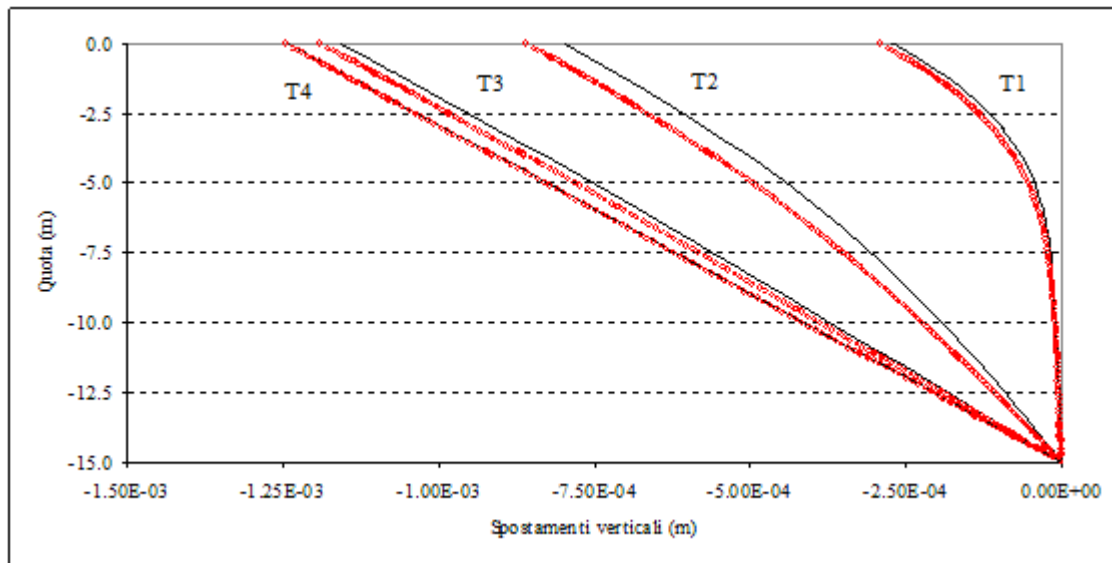


Fig. 4.7: Soluzione di spostamento della simulazione C.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.21E-4	0.62E-4	0.34E-4	0.05E-4
Errore relativo (%)	11.7	10.8	3.6	0.5

Tabella 4.11: Errori sugli spostamenti della simulazione C.

I risultati delle simulazioni A e C variano fra loro meno dello 0.1%. Si può constatare che con questo tipo di discretizzazione spaziale il modello converge ad una soluzione che anticipa quella esatta. Comportamento del tutto analogo a quanto visto nella soluzione del solo problema di flusso al Capitolo 3. Nei primi istanti il modello descrive in maniera corretta la propagazione della pressione e gli spostamenti lungo la colonna, ma successivamente lo scostamento tende ad aumentare, per poi convergere alla soluzione analitica in stazionario. La convergenza alla soluzione esatta è evidenziata nelle Tabelle 4.10 e 4.11 in cui è riportato il valore dell'errore assoluto agli istanti di riferimento. In particolare, l'errore assoluto a T4 risulta di un ordine di grandezza inferiore rispetto agli istanti precedenti. L'errore relativo assume valori molto alti per le pressioni agli istanti T3 e T4, 40-60% circa, e per gli spostamenti agli istanti T1 e T2, 11% circa. Questo è dovuto al fatto che la soluzione esatta in quegli istanti ha valori

molto piccoli lungo la colonna e il valore di $\|\vec{X}\|^2$, a denominatore nell'equazione (4.1), ha una influenza minore sulla riduzione dell'errore relativo. Esclusi gli istanti iniziali l'errore massimo di pressione e di spostamento si ha, rispettivamente, in prossimità della base inferiore e superiore della colonna. Gli errori sugli spostamenti sono inferiori di un ordine di grandezza rispetto a quelli sulla pressione, con un errore relativo massimo di circa il 10%.

Le simulazioni D e E sono effettuate discretizzando il dominio con le griglie di Tipo 2 e 3 (Fig. 2.2b,c). I risultati, riportati in Fig. 4.8-11, sono identici, come già visto sia nella verifica di convergenza in stazionario che nella soluzione del problema di flusso in transitorio. Anche in questo caso lo scostamento dalla soluzione segue lo stesso andamento visto nel caso del solo problema di flusso in transitorio: dopo i primi istanti la soluzione di calcolo presenta un ritardo rispetto a quella ideale, per poi convergere a quest'ultima in stazionario. Come evidenziato nelle Tabelle 4.13 e 4.14, l'errore relativo massimo sullo spostamento, circa l'8%, è di un ordine di grandezza inferiore a quello sulla pressione.

Simulazione D	
Griglia 2-D Tipo 2	
nodi	305
elementi	480
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
ϑ	1

Tabella 4.12: Parametri della simulazione D.

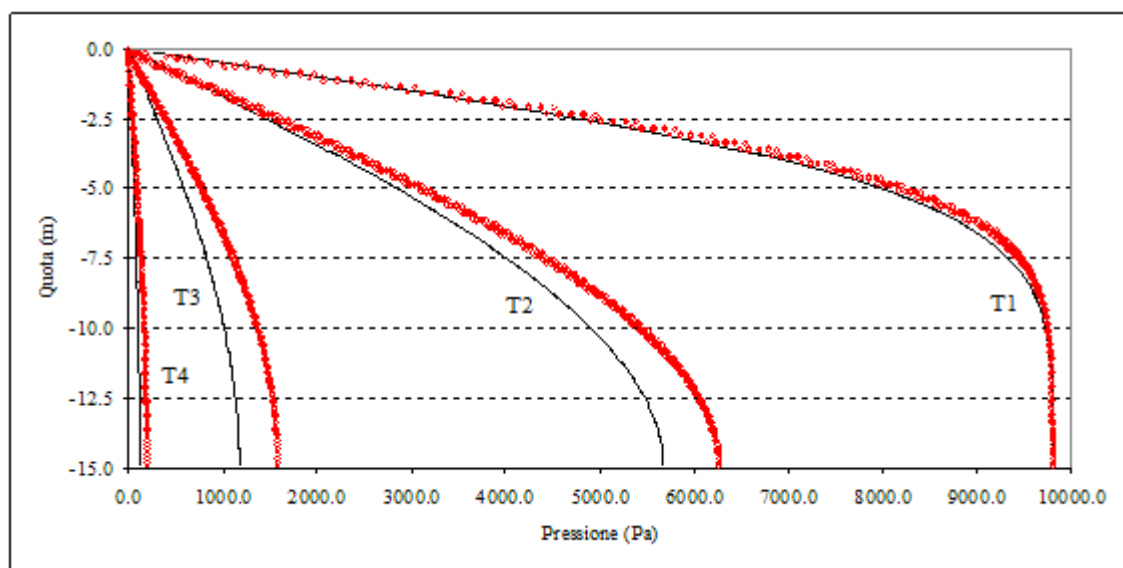


Fig. 4.8: Soluzione di pressione della simulazione D.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	359.5	608.5	420.7	92.9
Errore relativo (%)	1.7	10.4	35.4	83.9

Tabella 4.13: Errori sulle pressioni della simulazione D.

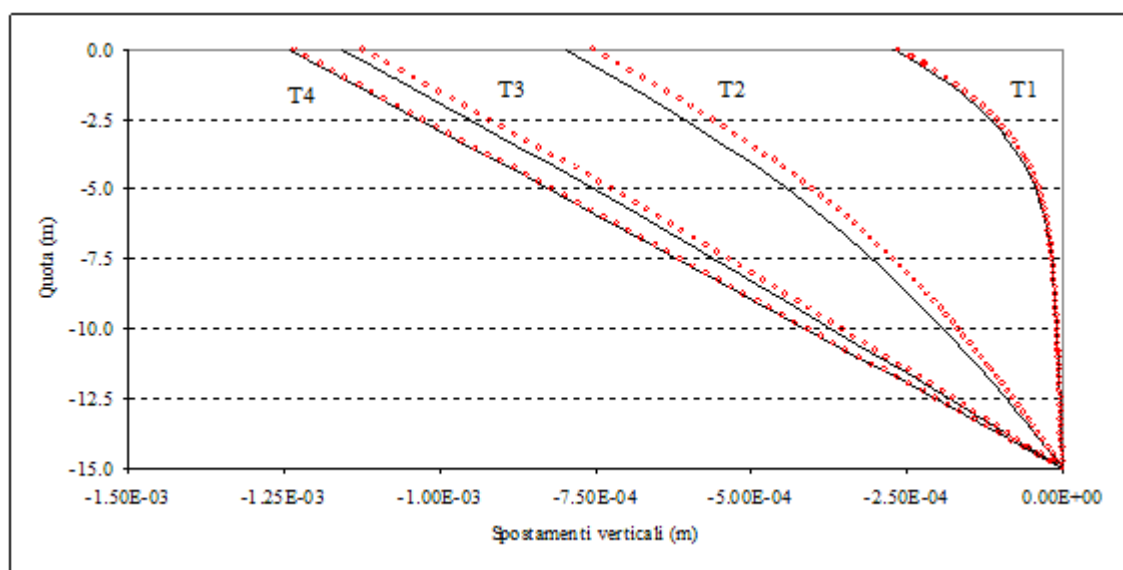


Fig. 4.9: Soluzione di spostamento della simulazione D.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.11E-4	0.45E-4	0.32E-4	0.07E-4
Errore relativo (%)	6.2	8.0	3.5	0.7

Tabella 4.14: Errori sugli spostamenti della simulazione D.

Simulazione E	
Griglia 2-D Tipo 3	
nodi	305
elementi	480
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
ϑ	1

Tabella 4.15: Parametri della simulazione E.

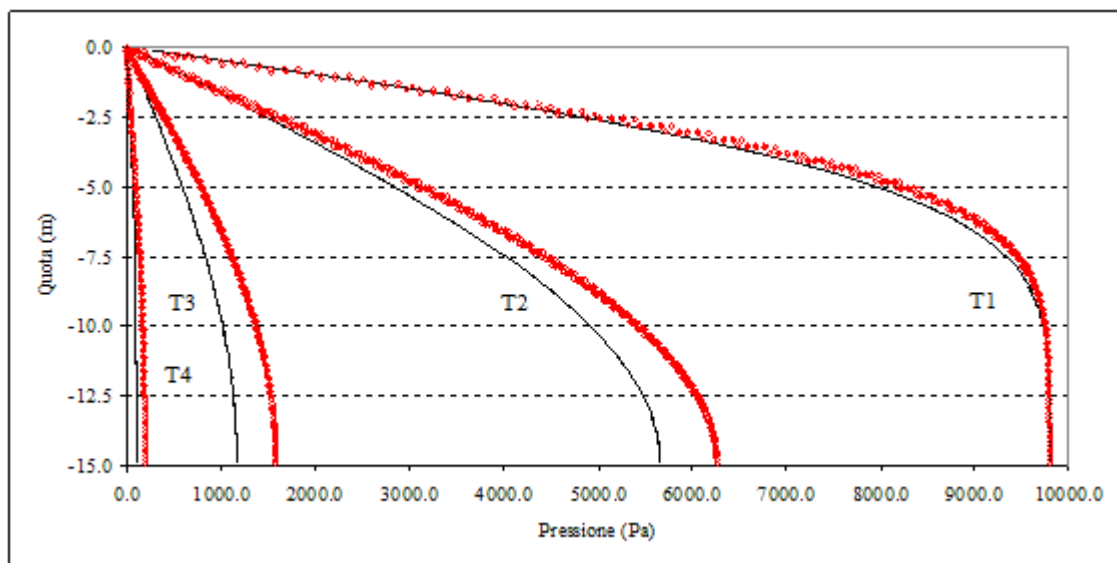


Fig. 4.10: Soluzione di pressione della simulazione E.

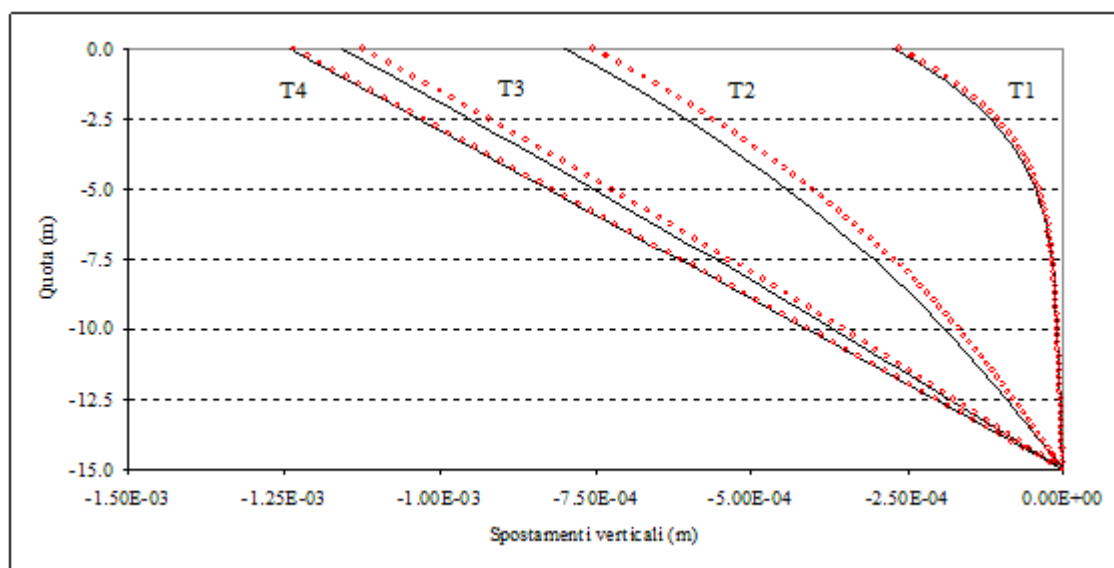


Fig. 4.11: Soluzione di spostamento della simulazione E.

Nella simulazione F il dominio è stato discretizzato con una griglia di Tipo 4 (Fig. 2.2d). In questo caso il modello converge alla soluzione esatta, sia in termini di pressione che di spostamenti, come riportato in Fig. 4.12 e 4.13.

Simulazione F	
Griglia 2-D Tipo 4	
nodì	545
elementi	960
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
ϑ	1

Tabella 4.16: Parametri della simulazione F.

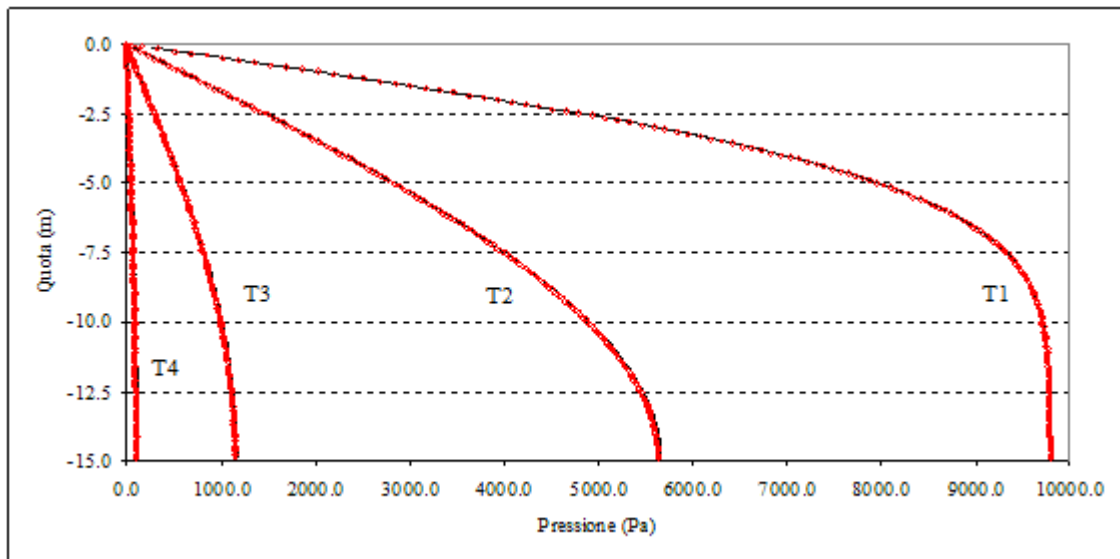


Fig. 4.12: Soluzione di pressione della simulazione F.

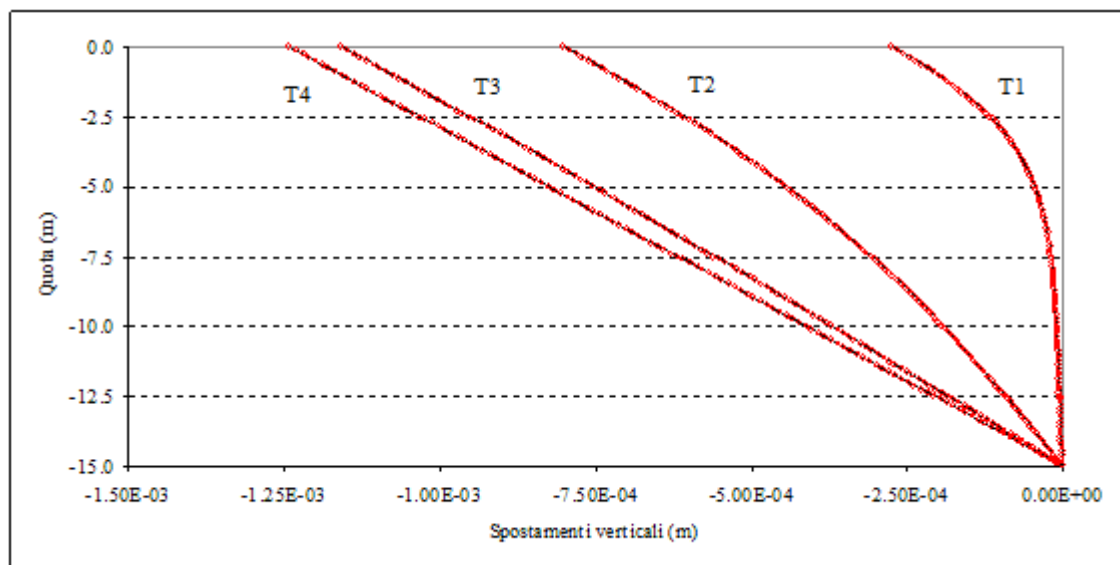


Fig. 4.13: Soluzione di spostamento della simulazione F.

4.1.1.1. OSSERVAZIONI

Lo studio del comportamento del accoppiato in 2-D permette di fare le seguenti osservazioni:

- La soluzione calcolata, per tutti i tipi di discretizzazione spaziale, presenta un comportamento analogo a quanto visto per il problema di flusso in regime transitorio al Capitolo 3. Nel caso di griglia spaziale non adatta, duante la fase di transitorio, i valori di pressione e di spostamento lungo la colonna tendono a scostarsi da quelli analitici. La simulazione F, con la griglia di Tipo 4, è l'unica che non mostra scostamenti dalla soluzione analitica durante la fase di transitorio e converge alla soluzione esatta.
- La griglia di Tipo Delaunay porta il modello a convergere ad una soluzione che tende ad anticipare quella ideale. L'errore relativo massimo di pressione nella fase di transitorio è dell'ordine del 40%, mentre quello di spostamento risulta di un ordine di grandezza inferiore, circa il 10%. Per quanto riguarda l'errore relativo di pressione non è stato tenuto in considerazione l'istante T4, in quanto i valori della soluzione esatta, prossimi a zero, incidevano in maniera significativa sulla stima in eccesso dell'errore relativo.
- Con le griglie di Tipo 2 e 3 il modello dà risultati identici. La soluzione è ritardata rispetto a quella ideale nella fase di transitorio, gli errori massimi di pressione e di spostamento hanno ordini di grandezza analoghi a quelli calcolati nel caso di griglia di Delaunay.
- Per tutti i tipi di griglia il modello tende a converge alla soluzione esatta in regime stazionario.
- L'uso di uno schema di integrazione temporale differente, Eulero implicito o di Crank-Nicolson, non incide in maniera significativa sulla qualità della soluzione.
- Per tutti i tipi di griglia lo scostamento della soluzione sugli spostamenti è minore di un ordine di grandezza rispetto che sulle pressioni, attestandosi su valori massimi del 10% circa.

4.1.2. DISCRETIZZAZIONE 3D

Nel caso di dominio 3-D si è assunta la stessa discretizzazione spaziale adottata nella soluzione del solo problema di flusso al Capitolo 3. Le simulazioni G e H, i cui parametri sono riportati nelle Tabelle 4.17 e 4.20, si differenziano solo per il tipo di schema di integrazione temporale. Dal confronto delle soluzioni sulle pressioni e sugli spostamenti, in Fig. 4.14-17, e dal confronto degli errori, nelle Tabelle 4.18-19 e 4.21-22, si conclude che un diverso schema di integrazione temporale non incide in maniera significativa sulla qualità della soluzione, come in 2-D.

Il modello ha una risposta simile a quanto visto per il solo problema di flusso. Dopo i primi istanti, la soluzione tende ad essere in ritardo rispetto a quella analitica, per poi convergere in regime stazionario. Anche nella discretizzazione 3-D gli errori sulla soluzione di spostamento sono di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quelli di pressione. L'errore massimo di spostamento si scosta del 10% circa dalla soluzione esatta, mentre quello di pressione del 50%. Anche in 3-D, per gli errori relativi massimi di pressione, non è stato preso in considerazione l'istante T4 per gli stessi motivi esposti al paragrafo precedente.

Simulazione G	
Griglia 3-D	
nodi	279
elementi	720
$h=h_L=h_s$ (m)	0.5
Δt (s)	0.1
ϑ	1

Tabella 4.17: Parametri della simulazione G.

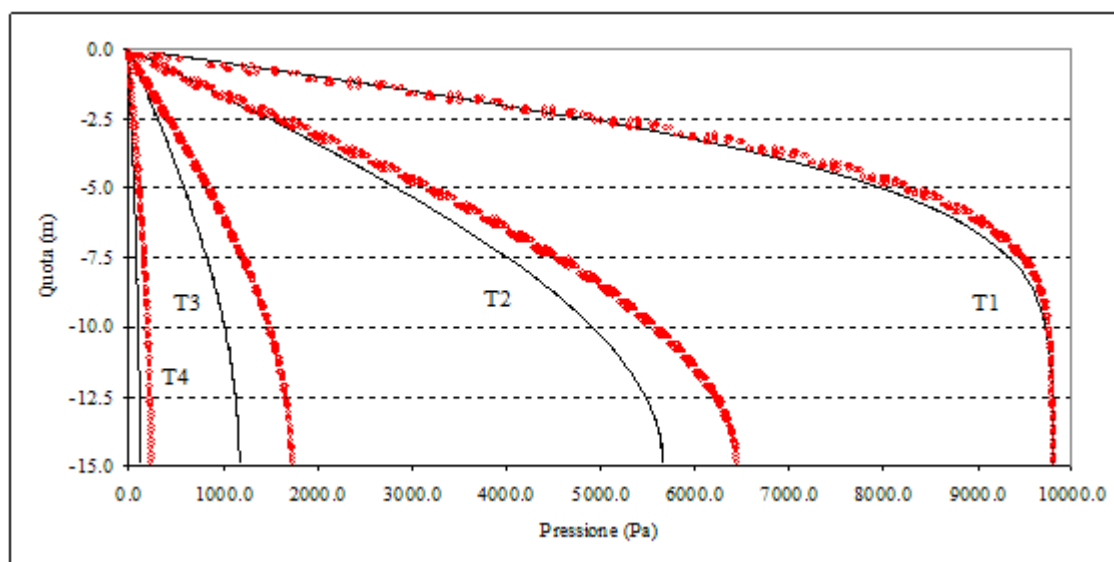


Fig. 4.14: Soluzione di pressione della simulazione G.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	514.9	789.2	562.7	130.7
Errore relativo (%)	2.2	13.4	47.1	117.7

Tabella 4.18: Errori sulla pressione della simulazione G.

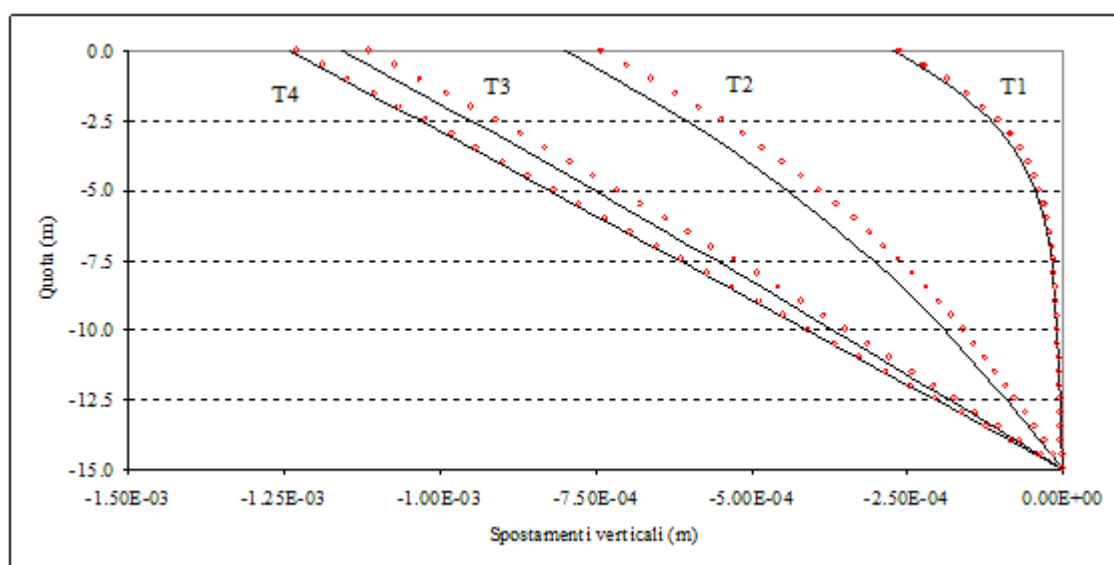


Fig. 4.15: Soluzione sullo spostamento della simulazione G.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.12E-4	0.58E-4	0.43E-4	0.10E-4
Errore relativo (%)	7.0	10.2	4.8	1.0

Tabella 4.19: Errori sullo spostamento della simulazione G.

Simulazione H	
Griglia 3-D	
nodi	279
elementi	720
$h=h_L=h_S$ (m)	0.5
Δt (s)	0.1
ϑ	0.5

Tabella 4.20: Parametri della simulazione H.

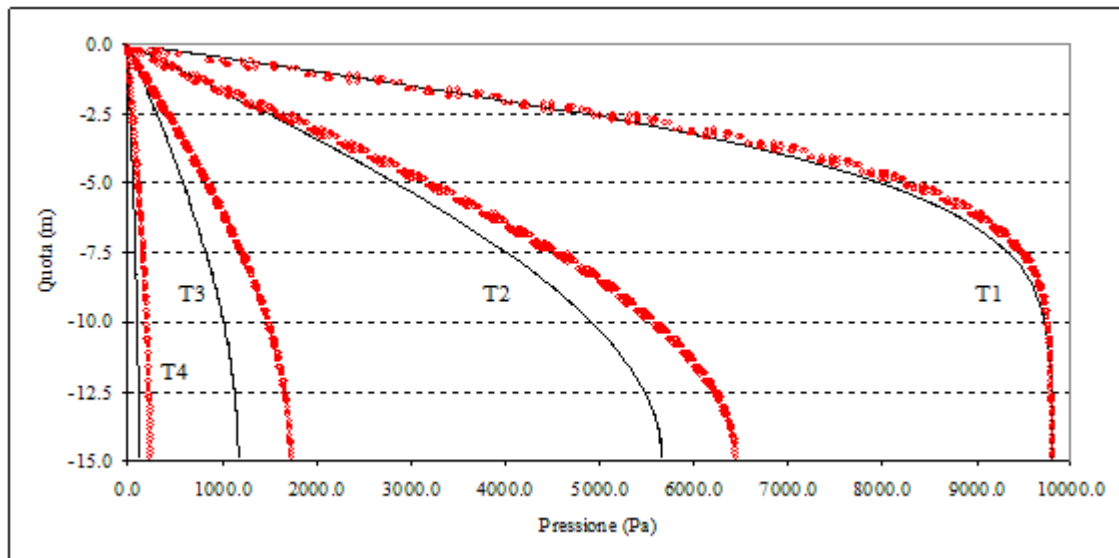


Fig. 4.16: Soluzione di pressione della simulazione H.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	514.9	789.2	562.7	130.7
Errore relativo (%)	2.2	13.4	47.1	117.7

Tabella 4.21: Errori sulla pressione della simulazione H.

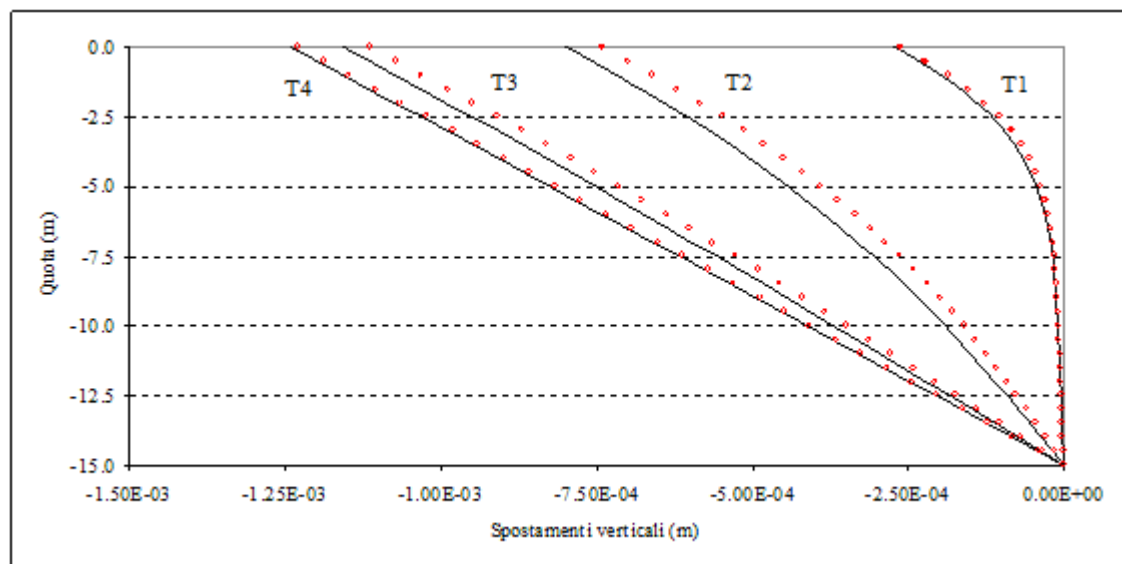


Fig. 4.17: Soluzione di spostamento della simulazione H.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.12E-4	0.58E-4	0.43E-4	0.10E-4
Errore relativo (%)	7.0	10.2	4.8	1.0

Tabella 4.21: Errori sullo spostamento della simulazione H.

4.1.2.1. OSSERVAZIONI

Lo studio del modello accoppiato in 3-D conduce alle seguenti osservazioni:

- Analogamente al caso 2-D, la soluzione calcolata presenta un comportamento del tutto simile a quanto visto per il problema di flusso in regime transitorio al Capitolo 3. Durante la fase di transitorio i valori di pressione e di spostamento lungo la colonna tendono a scostarsi da quelli analitici, e il modello a convergere ad una soluzione che mostra un ritardo rispetto a quella ideale.
- Il modello tende comunque a convergere alla soluzione esatta in regime stazionario.
- L'uso di uno schema di integrazione temporale differente, Eulero implicito o di Crank-Nicolson, non incide in maniera significativa sulla qualità della soluzione.
- Anche in 3-D lo scostamento della soluzione sugli spostamenti è minore di un ordine di grandezza rispetto che sulle pressioni, attestandosi su valori massimi del 10% circa. L'errore massimo sulle pressioni si scosta invece di quasi il 50% rispetto alla soluzione esatta.

4.2. PROBLEMA ETEROGENEO

Uno degli obbiettivi di accoppiare una formulazione FEM per l'equilibrio del mezzo poroso a un approccio ai volumi finiti per il flusso è la limitazione delle oscillazioni numeriche all'interfaccia di materiali con diverse permeabilità. Ciò è dovuto alla discretizzazione di pressioni e tensioni nello stesso spazio funzionale con basi costanti a tratti.

Per valutare se il modello presenti oscillazioni numeriche sul valore della pressione all'interfaccia tra due materiali con differente conducibilità idraulica è stata simulata una colonna di lunghezza $L=15$ m formata da 10 m di argilla e 5 m di sabbia (Fig. 4.18).

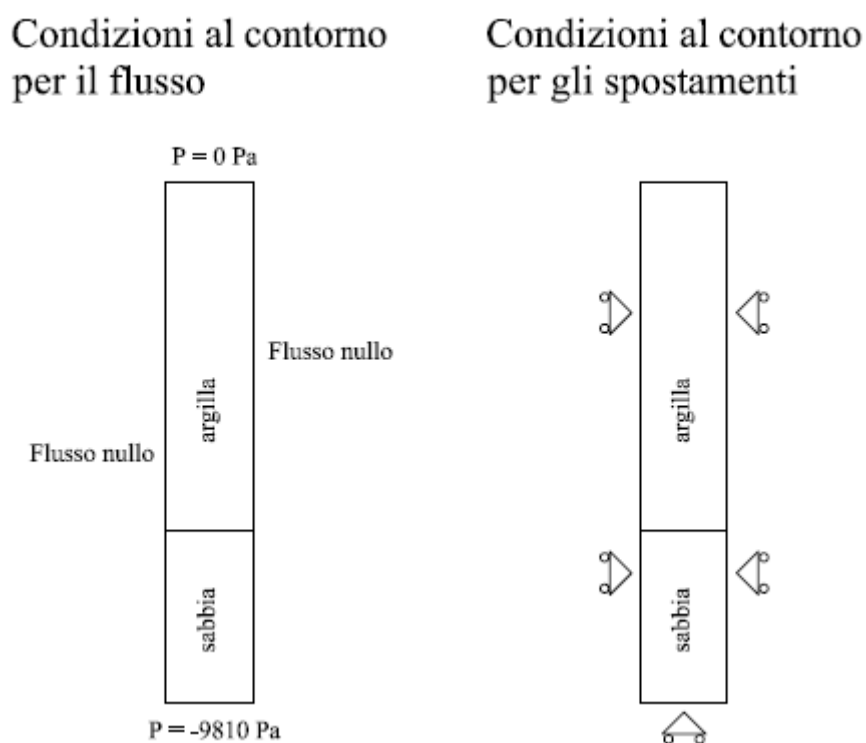


Fig. 4.18: Condizioni al contorno per l'esempio numerico del problema eterogeneo

Le caratteristiche idrauliche e meccaniche sono riassunte nella Tabella 4.22. Il drenaggio è consentito alle basi, alla base inferiore è imposta una pressione di -9810 Pa, a quella superiore la pressione nulla. Lo spostamento al contorno non è impedito solo sulla base superiore. La pressione e gli spostamenti iniziali nel dominio sono nulli.

Conducibilità idraulica sabbia	k_s (m/s)	1.00E-05
Conducibilità idraulica argilla	k_a (m/s)	1.00E-08
Porosità	ϕ	0.375
Compressibilità del fluido	β (1/MPa)	4.40E-04
Costante di Lamé	λ (MPa)	40
Costante di lamé	μ (MPa)	40
Coeff. di Biot	α	1.0

Tabella 4.22: Proprietà idrauliche e meccaniche per l'esempio numerico del problema eterogeneo.

Le soluzioni di pressione e spostamento calcolate vengono quindi graficate assieme alla soluzione ideale agli istanti specificati in Tabella 4.23.

	Istante (s)
T1	60
T2	180
T3	600
T4	1800

Tabella 4.23: Istanti della simulazione graficati.

Come fatto nelle simulazioni precedenti, per tutti gli istanti di riferimento è stato quantificato lo scostamento della soluzione di calcolo da quella esatta calcolando l'errore assoluto e l'errore relativo. Per la soluzione di pressione gli errori sono stati calcolati solo nello strato di sabbia, al contrario, per la soluzione di spostamento sono stati calcolati nello strato di argilla.

4.2.1. DISCRETIZZAZIONE 2D CON GRIGLIA TIPO 4

La discretizzazione spaziale del dominio è stata effettuata solo nel 2-D con la griglia di Tipo 4 (Fig. 2.2d) che ha dato i migliori risultati in tutti gli esempi precedenti. I parametri delle simulazione I e L, riassunti nelle Tabelle 4.24 e 4.27, differiscono per il diverso grado di raffinamento della griglia e per il passo di integrazione temporale. Per entrambe è stato adottato lo schema di integrazione di Eulero implicito, come visto nelle simulazioni precedenti, lo schema di Crank-Nicolson non migliora in maniera significativa la qualità della soluzione.

I risultati della simulazione I, riportati in Fig. 4.19 e 4.20, mostrano che la soluzione di pressione calcolata nelle argille segue la soluzione esatta, mentre nelle sabbie ha un leggero ritardo nei primi istanti della simulazione. In questi primi istanti, all'interfaccia tra sabbia e argilla e alla base inferiore della colonna, sono presenti oscillazioni sul valore di pressione, di circa 1000 Pa. Il valore dell'oscillazione è dello stesso ordine di grandezza di quello calcolato con un modello FEM in cui la deformazione ha la stessa approssimazione della pressione, con $h=0.03$ m e $\Delta t=0.01$ s [14].

La soluzione di pressione non mostra scostamenti dalla soluzione esatta quando il problema si avvicina alla condizione di stazionarietà, come si può notare dalla stima degli errori in Tabella 4.25. Al contrario della pressione, gli spostamenti calcolati durante il transitorio si scostano dalla soluzione esatta nello strato di argilla. L'errore è comunque modesto, con un massimo del 6%, come riportato in Tabella 4.26.

Simulazione I	
Griglia 2-D Tipo 4	
Nodi	153
elementi	240
h (m)	0.5
Δt (s)	0.1
9	1

Tabella 4.24: Parametri della simulazione I.

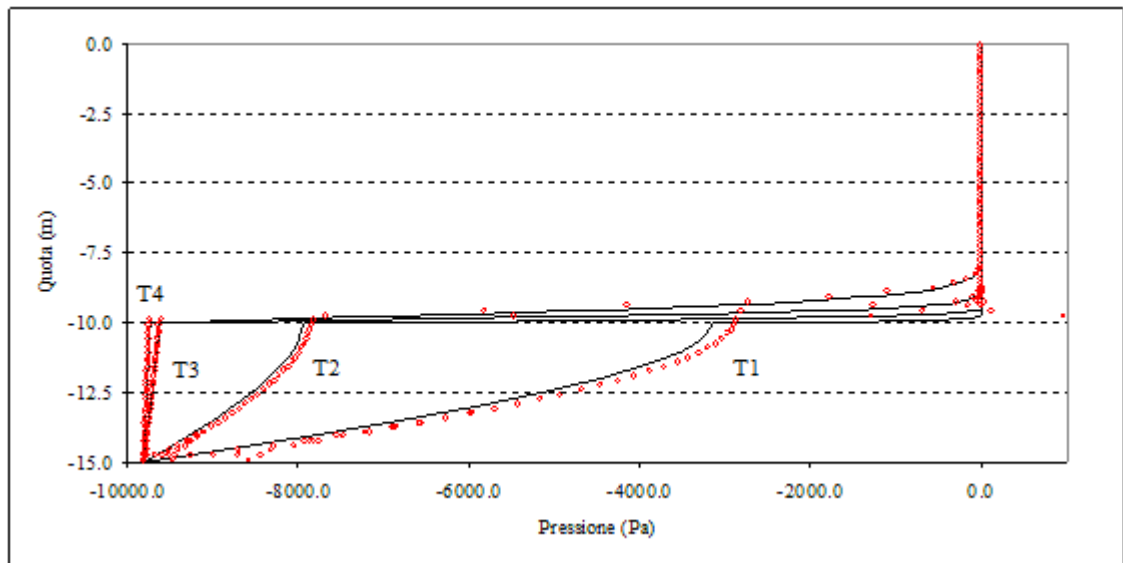


Fig. 4.19: Soluzione di pressione della simulazione I.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	1066.5	289.0	19.0	6.0
Errore relativo (%)	6.0	1.3	0.0	0.0

Tabella 4.25: Errori sulla pressione della simulazione I.

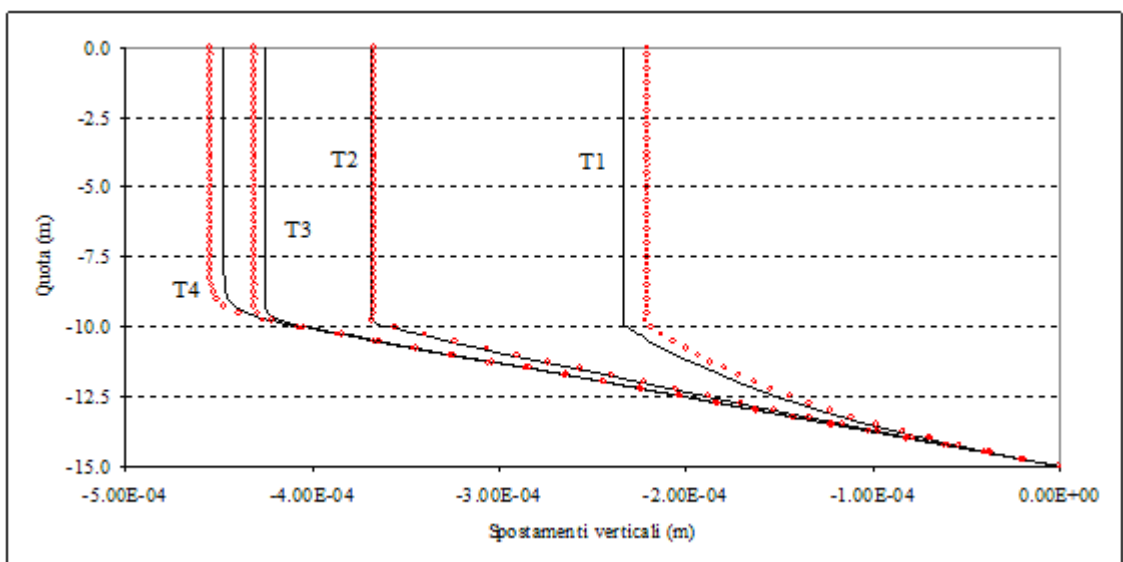


Fig. 4.20: Soluzione di spostamento della simulazione I.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	1.34E-5	0.23E-5	0.57E-5	0.7E-5
Errore relativo (%)	5.7	0.6	1.1	1.4

Tabella 4.26: Errori sullo spostamento della simulazione I.

I risultati di pressione della simulazione L, riportati in Fig. 4.21, non mostrano nessuna oscillazione sul valore della pressione all'interfaccia tra sabbia e argilla. I valori di pressione nelle argille seguono la soluzione esatta. Nelle sabbie, invece, la soluzione è in leggero anticipo nelle fasi iniziali del transitorio, ma converge a quella esatta in stazionario. L'errore relativo massimo di pressione, riportato in Tabella 4.28, è dell'ordine del 2%. Come già visto per la simulazione I, gli spostamenti calcolati non hanno scostamenti dalla soluzione esatta nelle sabbie (Fig. 4.22). Nelle argille l'errore massimo è del 3%, come riportato in Tabella 4.29.

Simulazione L	
Griglia 2-D Tipo 4	
nodì	545
elementi	960
h (m)	0.25
Δt (s)	0.05
θ	1

Tabella 4.27: Parametri della simulazione L.

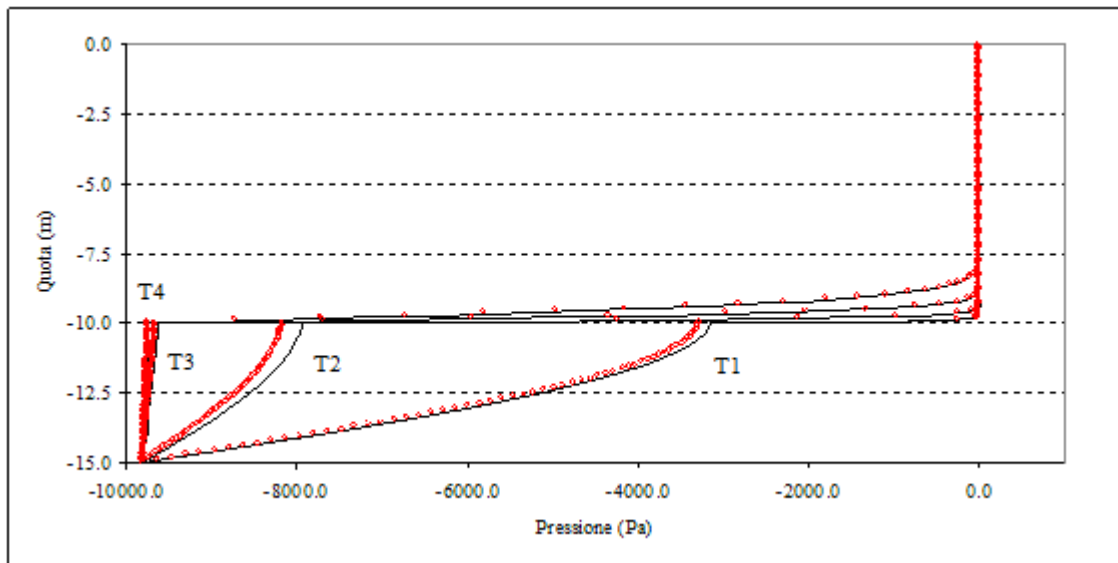


Fig. 4.21: Soluzione di pressione della simulazione L.

Pressioni	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	176.7	239.5	43.9	11.1
Errore relativo (%)	2.4	2.0	0.3	0.1

Tabella 4.28: Errori sulla pressione della simulazione L.

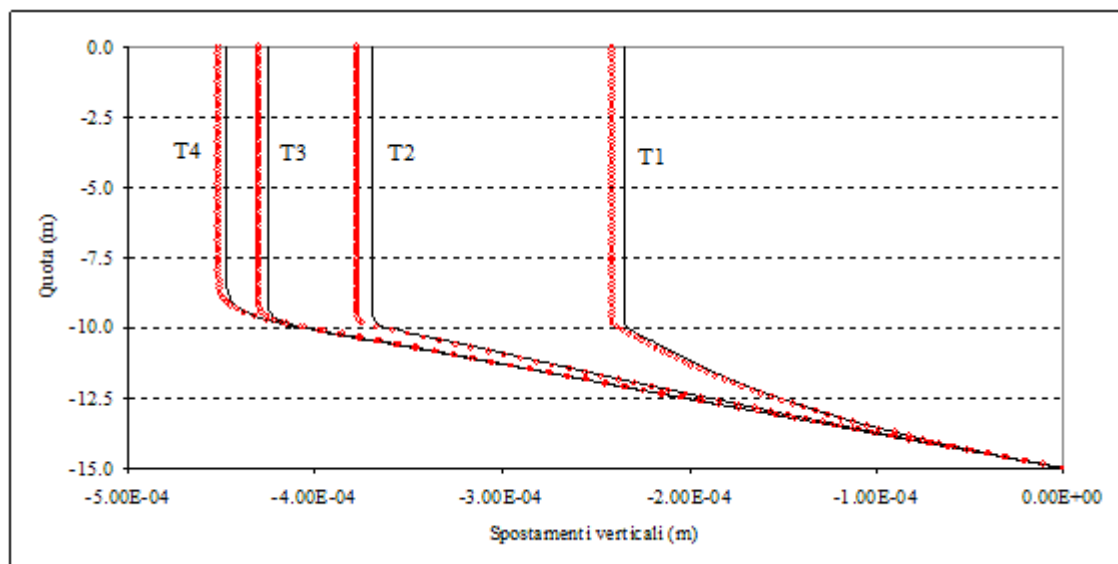


Fig. 4.22: Soluzione di spostamento della simulazione L.

Spostamenti	T1	T2	T3	T4
Errore assoluto (Pa)	0.67E-5	0.89E-5	0.49E-5	0.43E-5
Errore relativo (%)	2.9	2.4	1.0	0.8

Tabella 4.29: Errori sullo spostamento della simulazione L.

4.2.1.1. OSSERVAZIONI

Lo studio del modello accoppiato in un problema eterogeneo ha permesso di evidenziare le seguenti osservazioni:

- Le oscillazioni numeriche sul valore della pressione all'interfaccia scompaiono infittendo in maniera opportuna il reticolo di calcolo e riducendo il valore del passo di integrazione temporale Δt . Quindi, accoppiando una formulazione FEM per l'equilibrio del mezzo poroso ad un approccio ai volumi finiti per il flusso, si ottengono gli stessi risultati del modello ad elementi finiti misti [14] e della discretizzazione completa delle equazioni di Biot con i volumi finiti [15,16–21]. Rispetto agli elementi finiti misti il vantaggio è dato dal minor onere computazionale, mentre un approccio ai volumi finiti riservato solo al flusso permette una discretizzazione spaziale semplificata.
- La soluzione sulla pressione a cui converge il modello si scosta leggermente dalla soluzione ideale nello strato di sabbia durante il regime transitorio. Nello strato di argilla i valori calcolati coincidono con quelli esatti.
- La soluzione sugli spostamenti a cui converge il modello ha un andamento opposto a quello della pressione: nello strato di argilla è leggermente anticipata rispetto alla soluzione ideale, mentre nello strato di sabbia non è presente nessuno scostamento.
- L'ordine di grandezza massimo degli errori si attesta intorno al 2% e 3% rispettivamente per la soluzione sulle pressione e sugli spostamenti.

5. CONCLUSIONI

Nel presente studio è stato discusso un nuovo modello di discretizzazione delle equazioni di Biot che descrivono il fenomeno della consolidazione tridimensionale. L'equazione dell'equilibrio elastico è stata discretizzata con un approccio variazionale classico agli elementi finiti, mentre si è utilizzato un metodo ai volumi finiti per l'equazione del bilancio di massa. In questo modo la discretizzazione del problema è conservativa e non implica l'introduzione di incognite legate al flusso come nella formulazione agli elementi finiti misti, con un conseguente risparmio computazionale nella gestione e soluzione del modello.

Dai risultati di calcolo effettuati si può riassumere che:

- Il gradiente di pressione alla frontiera di un volume di controllo può essere modellato come rapporto incrementale tra i valori di pressione dei due volumi che hanno in comune la frontiera stessa. Tale approssimazione, infatti, descrive in maniera opportuna la propagazione della pressione all'interno del mezzo poroso, anche in presenza di forti gradienti localizzati.
- La discretizzazione conservativa, assieme ad un adeguato raffinamento della maglia e una riduzione del passo di integrazione, è di fondamentale importanza per evitare oscillazioni numeriche sul valore della pressione all'interfaccia tra due materiali eterogenei.
- Il modello ai volumi finiti può rivelarsi sensibile alla griglia di calcolo, cioè ai volumi elementari utilizzati per la sua formulazione. La scelta di una appropriata griglia di calcolo è necessaria per avere una risposta in termini di pressione che non si scosti da quella esatta nella fase di transitorio. La risposta in termini di spostamento si è mostrata invece molto più affidabile. Nelle simulazione eseguite l'errore massimo di spostamento è risultato sempre di un ordine di grandezza inferiore rispetto a quello di pressione, e nei casi peggiori lo scostamento rispetto alla soluzione esatta era di circa il 10%. Nella fase di transitorio la soluzione di pressione presentava scostamenti massimi dell'ordine del 40-50%.

- Per qualsiasi tipo di griglia il modello converge alla soluzione esatta in transitorio, sia in termini di pressione che di spostamento.
- La scelta di uno schema di integrazione temporale di Eulero implicito o di Crank-Nicolson non incide in maniera significativa sulla qualità della soluzione.

I vantaggi numerici del modello, quali la riduzione del numero di incognite e l'estrema semplicità di implementazione, sono parzialmente limitati dai problemi legati alla geometria del reticolo di calcolo. A questo punto della ricerca il modello fornisce risultati maggiormente accurati per lo spostamento che per le pressioni. Nel caso di un dominio bidimensionale è stata individuata una geometria di discretizzazione valida, mentre saranno necessari altri studi per risolvere adeguatamente il problema nelle tre dimensioni. In particolare vanno analizzati più nel dettaglio i motivi che influiscono sulla maggior o minor accuratezza del modello in funzione della forma dei volumi di controllo, che nel presente modello coincidono con gli elementi stessi della griglia di calcolo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. Katz, V. Sankaran, High aspect ratio grid effects on the accuracy of Navier–Stokes solutions on unstructured meshes, *Computers & Fluids* 65 (2012) 66–79.
- [2] C. Hirsch, *Numerical Computation of internal and external flows*, Secon edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2007.
- [3] C. Swan, R. Lakes. R Brand, K. Stewart, Micromechanically based poroelastic modeling of fluid flow in Haversian bone, *J.Biomech. Eng.* 125(2003) 25-37.
- [4] G. Gambolati, *Lezioni di metodi numerici per ingegneria e scienze applicate*, seconda ed, Cortina, Padova, 2002.
- [6] G. Gambolati, R.A. Freeze, Mathematical simulation of the subsidence of Venice. 1 Theory, *Water Resources Research*, 9(3), pag 721-733,1973.
- [7] H.F. Wang, *Theory of Linear Poroelasticity*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [8] J. De Wiest, On the storage coefficient and the equations of groundwater flow, *Journal of Geophysics Research*, Vol.71 pag 1117-1122, 1966.
- [9] J. Hudson, O. Stephansson, J.Andersson, C.F. Tsang, L.Ling, Coupled T-H-M iusses related to radioactive waste repository design and performance, *Int. J. Rock Mech Mining Sci.* 38(2001) 143-161.
- [10] K. Terzaghi, *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*, F. Duticke, Vienna, 1925.
- [11] M.A. Biot, General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.* 12 (1941) 155-164.
- [12] M. Ferronato, G. Gambolati, P. Teatini, Ill-conditioning of finite element poroelasticity equations, *Int. J. Solids Struct.* 38 (2001) 5995-6014.
- [13] M. Ferronato, G. Gambolati, P. Teatini, D. Baù, Radioactive marker measurements in heterogeneous reservoirs: numerical study, *Int. J. Geomech.* 4 (2004) 79-92.
- [14] M. Ferronato, N. Castelletto, G. Gambolati, A fully coupled 3-D mixed finite element model of Biot consolidation, *J. of Computational Physics* 229 (2010) 4813-4830.

- [15] Naumovich A. Efficient numerical methods for Biot poroelasticity system in multilayered domains. Phd thesis, Technical University Kaiserslautern; 2007.
- [16] Naumovich A, Gaspar FJ. On a multigrid solver for the three-dimensional Biot poroelasticity system in multilayered domains. *Comput Vis Sci* 2008; 11(2): 77-87.
- [17] O. Coussy, *Mechanics of Porous Continua*, J. Wiley & Sons, New York, NY, 1995.
- [18] O.C. Zienkiewicz, R.L Taylor, *The Finite Element Method*, fifth ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2000.
- [19] O. Schenk and K. Gärtner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. *J. of Future Generation Computer System*, 20(3):475-487, 2004.
- [20] P. Teatini, M. Ferronato, G. Gambolati, M. Gonella. Groundwater pumping and land subsidence in the Emilia-Romagna coastland, Italy: modeling the past occurrence and the future trend, *Water Resour. Res.* 42 (2006), doi:10.1029/2005WR004242.
- [21] R. Asadi, B. Ataie-Ashtiani, C.T. Simmons, Finite volume coupling strategies for solution of biot consolidation model, *Computers and Geotechnics* 55 (2014) 494-505.
- [22] S.J. Wang, K.C. Hsu, The application of the first-order second-moment method to analyze poroelastic problems in heterogeneous porous media, *J. Hydrol.* 369 (2009) 209-402.
- [23] S. Yin, M.B. Dusseault, L. Rothenburg, Thermal reservoir modeling in petroleum geomechanics, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 33 (2009) 449-485.
- [24] T Roose, P. Netti, L. Munn, Y. Boucher, R. Jain, Solid stress generated by spheroid growth estimated using a linear poroelastic model, *Microvasc. Res.* 66 (2003) 204-212.
- [25] W.K.S. Pao, R.W. Lewis, I. Masters, A fully coupled hydro-thermo-poro-mechanical model for black oil reservoir simulation, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 25(2001) 1229-1256.
- [26] Z.Q. Zhu, P. Wang and S.F Tuo, Beijing China, An adaptive solution of the 3-D Euler equations on an Unstructured grid, *Acta Mechanica* 155, 215-231 (2002).